Ein neuer Zusammenhang zwischen einfachen Gruppen und einfachen Singularitäten

Friedrich Knop*
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel

Summary: We describe a new construction to obtain a simple hypersurface singularity from the corresponding simple complex group G. Let X be the closed orbit in the projective space attached to the Lie algebra $\mathbf{g}$ of G. Consider a regular nilpotent element $y_0 \in \mathbf{g}$ and denote by H_{y_0} the hyperplane orthogonal to y_0 with respect to the Killing form. Then the hyperplane section $X \cap H_{y_0}$ has exactly one singularity which is simple of desired type. By variation of the point y_0 we obtain a versal deformation. The construction generalizes with minor modifications to any characteristic p of the basefield. Even in bad characteristic we recover at least the positive part of the semi-universal deformation. We prove that for $p = 2$ a simple, quasihomogeneous singularity of type $\mathtt{A}_7$ resp. $\mathtt{D}_8$ is adjacent to $\mathtt{E}_7$ resp. $\mathtt{E}_8$ provided its dimension is even. Furthermore $\mathtt{A}_8$ is adjacent to $\mathtt{E}_8$ for $p = 3$.

§0. Einleitung

Unter allen Typen von Singularitäten algebraischer Varietäten spielen die einfachen Hyperflächensingularitäten eine besondere Rolle, da viele „schöne“ Eigenschaften nur für sie zutreffen. Am bekanntesten sind sie in der Gestalt der rationalen Doppelpunkte, d.h. als Quotient des C^2 nach einer endlichen Untergruppe der $Sl_2(C)$. Weiterhin sind sie unter den Hyperflächensingularitäten z.B. dadurch charakterisiert, daß sie nur in endlich viele andere Singularitäten deformiert werden können. Über ein Dutzend äquivalenter Definitionen findet man in [9]. Klassifiziert werden die einfachen Singularitäten durch die Dynkindiagramme vom Typ $\mathtt{A}_n$, $\mathtt{D}_n$ und $\mathtt{E}_n$.

Auf der anderen Seite werden auch die einfachen algebraischen Gruppen bzw. die irreduziblen Wurzelsysteme durch Dynkindiagramme klassifiziert, denen man die Symbole $\mathtt{A}_n$, $\mathtt{B}_n$, $\mathtt{C}_n$, $\mathtt{D}_n$, $\mathtt{E}_6$, $\mathtt{E}_7$, $\mathtt{E}_8$, $\mathtt{F}_4$ und $\mathtt{G}_2$ zuordnet. Dabei entsprechen den Diagrammen vom Typ ADE genau die homogenen Wurzelsysteme. Es stellt sich also zwangsläufig die Frage, ob es eine direkte Verbindung zwischen einfachen algebraischen Gruppen und einfachen Singularitäten gibt, oder anders ausgedrückt: Kann man ausgehend von einer einfachen algebraischen Gruppe G mit homogenenem Wurzelsystem Δ die entsprechende Singularität auf kanonische Weise rekonstruieren?

Eine solche Konstruktion wurde Ende der sechziger Jahre in einer Serie von Vermutungen von Grothendieck angegeben, die dann alle 1970 von Brieskorn [7] bestätigt wurden. Eine sehr gute Darstellung dieser Theorie findet sich im Buch von Slodowy [16]. Die zentrale Idee dabei ist, die Geometrie des Nullkegels der Liealgebra von G längs der Teilmenge der subregulären Elemente zu untersuchen. Ich nenne dies daher die *Nullkegelkonstruktion* (NK). Dies war bisher die einzige direkte Verbindung zwischen einfachen Gruppen und einfachen Singularitäten.

* Unterstützt durch den Schweizerischen Nationalfonds

In der vorliegenden Arbeit wird eine neue Konstruktion angegeben. Sie ist etwas einfacher als die vorangegangene, da kaum Kenntnisse über die Geometrie der Quotientenabbildung benötigt werden. Daher kommt diese Theorie fast ohne Einschränkungen an die Charakteristik des Grundkörpers k aus. Der Einfachheit halber nehmen wir aber in dieser Einleitung zunächst an, daß k algebraisch abgeschlossen der Charakteristik null ist.

Wir starten mit einer einfachen algebraischen Gruppe G und betrachten die adjungierte Darstellung auf ihrer Liealgebra $\mathbf{g}$. Da sie irreduzibel ist, gibt es im projektiven Raum $\mathbf{P}(\mathbf{g})$ genau eine abgeschlossene Bahn X unter G. Zu jedem Element $y \in \mathbf{g}$ sei X_y die Menge aller Punkte aus X, die bezüglich der Killingform senkrecht auf y stehen. X_y ist ein Hyperebenenschnitt. Eine ausgezeichnete Teilmenge von $\mathbf{g}$ ist die Menge der nilpotenten Elemente. Sie enthält genau eine dichte Bahn, deren Elemente *regulär nilpotent* heißen.

Sei Δ das Wurzelsystem von G. Mit Δ^* bezeichnen wir dasjenige Unterwurzelsystem von Δ, das von den langen einfachen Wurzeln erzeugt wird. Haben alle Wurzeln die gleiche Länge, dann ist $\Delta^* = \Delta$, während $\mathtt{B}_n^* = \mathtt{A}_{n-1}$, $\mathtt{C}_n^* = \mathtt{A}_1$, $\mathtt{F}_4^* = \mathtt{A}_2$ und $\mathtt{G}_2^* = \mathtt{A}_1$ ist. Es gilt dann:

Satz 1. *Sei $y \in \mathbf{g}$ regulär nilpotent. Dann hat X_y genau eine Singularität. Diese ist einfach vom Typ Δ^*.*

Da die Singularität im Divisor X_y vorkommt, nenne ich dies die *Divisorkonstruktion* (DK).

Wir können auch die Singularitäten von X_y für andere Punkte $y \in \mathbf{g}$ bestimmen. Für homogene Wurzelsysteme z.B. hat X_y genau dann nur endlich viele Singularitäten, wenn y regulär ist. Ihren Typ kann man aus der Jordanzerlegung von y ermitteln.

Wenn man den Punkt y variiert, erhält man eine Deformation der Singularität von X_y. Der folgende Satz besagt, daß diese Deformation schon so allgemein wie möglich ist:

Satz 2. *Sei $y \in \mathbf{g}$ regulär nilpotent. Dann ist die Deformation der Singularität von X_y über $\mathbf{g}$ versell.*

Der Hauptunterschied zwischen der Divisor- und der Nullkegelkonstruktion ist der, daß die Singularitäten im zweiten Fall immer zweidimensional sind, während die Dimension von X stark vom Wurzelsystem Δ abhängt (z.B. ist $\dim X = 21$, 33 bzw. 57 für $\Delta = \mathtt{E}_6$, $\mathtt{E}_7$ bzw. $\mathtt{E}_8$.) Deshalb ist es nicht möglich, die Singularitäten von X_y durch ihre Auflösung zu bestimmen. Wir folgen daher einer anderen Idee, die auch schon Brieskorn in [7] benützt hat. Sie verwendet die Quasihomogenität der Singularitäten von X_y, die durch eine Einparameteruntergruppe $\varrho(t)$ von G, die y normalisiert, induziert wird. Satz 1 folgt dann aus einem Kriterium von Saito [15], das es gestattet die Einfachheit einer quasihomogenen Hyperflächensingularität aus den Gewichten von $\varrho(t)$ abzulesen.

Um die Theorie auf Körper beliebiger Charakteristik auszudehnen, muß man noch ein paar Änderungen anbringen. Zum Beispiel muß man berücksichtigen, daß die Liealgebra $\mathbf{g}$ nicht mehr irreduzibel zu sein braucht und nicht immer eine Isogenieinvariante ist. Weiterhin gibt es in positiver Charakteristik im allgemeinen zu einem homogenen Wurzelsystem mehrere einfache Singularitäten, von denen allerdings nur eine quasihomogen ist. (siehe [2] für eine Klassifikation rationaler Doppelpunkte in beliebiger Charakteristik). Aber modulo dieser Details bleibt Satz 1 unverändert und Satz 2 für gute Charakteristik gültig. Eine überraschende Folge dieser Theorie ist, daß es Deformationen der einfachen Singularitäten untereinander gibt, bei denen der Rang von Δ konstant bleibt: So läßt sich für $\operatorname{char} k = 2$ in gerader Dimension eine $\mathtt{E}_7$- bzw. $\mathtt{E}_8$-Singularität in eine $\mathtt{A}_7$- bzw. $\mathtt{D}_8$-Singularität deformieren. Weiterhin ist für $\operatorname{char} k = 3$ die Deformation $\mathtt{E}_8 \to \mathtt{A}_8$ möglich. Diese ist sogar schon explizit in der Literatur vorhanden: Die Deformation $\mathtt{E}_8 \to \mathtt{A}_7$ in [1] ist für $\operatorname{char} k = 3$ eine Deformation $\mathtt{E}_8 \to \mathtt{A}_8$. Ich vermute, daß dies alle Deformationen sind, die in positiver Charakteristik zusätzlich zwischen einfachen, quasihomogenen Singularitäten existieren.

Eine Verallgemeinerung des Satzes 2 auf homogene Wurzelsysteme in schlechter Charakteristik läßt sich ebenfalls angeben. In diesen Fällen ist der Raum D der semiuniversellen Deformation nicht mehr rein positiv graduiert. Sei daher D^+ der „positive Teil“ von D, d.h. die abgeschlossene Teilmenge, auf der alle homogenen Funktionen negativen Gewichts verschwinden. Sei $\mathbf{b}^-$ die Borelunteralgebra von $\mathbf{g}$, die y enthält und $\mathbf{b}$ eine $\mathbf{b}^-$ gegenüberliegende Borelunteralgebra. Dann ist $\mathbf{b}' := y + \mathbf{b}$ der positive Teil der Deformation über $\mathbf{g}$. Man erhält:

Satz 2′. *Die Deformation der Singularität von X_y über $\mathbf{b}'$ ist äquivalent zur Deformation über D^+.*

Man beachte, daß in guter Charakteristik $D = D^+$ und damit Satz 2′ wirklich eine Verallgemeinerung von Satz 2 ist. Es folgt, daß über D^+ alle Singularitäten quasihomogen sind.

§1. Das Saito-Kriterium für einfache, quasihomogene Singularitäten

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir ein numerisches Kriterium von Saito [15] für einfache, quasihomogene Singularitäten auf algebraisch abgeschlossene Körper k beliebiger Charakteristik $p \geq 0$. Der Beweisgang ist dabei fast identisch mit [15]. Nur der Fall $p = 2$ erfordert einige Änderungen.

Für eine beliebige endliche Menge $\mathcal{X}$ sei $k[\![\mathcal{X}]\!]$ die von $\mathcal{X}$ erzeugte Potenzreihenalgebra. Für Elemente $g_1, \dots, g_s$ aus $k[\![\mathcal{X}]\!]$ sei $(g_1, \dots, g_s)$ das von ihnen erzeugte Ideal.

Lemma 1.1. *Seien $g_1, \dots, g_s \in k[\![\mathcal{X}]\!]$ mit $(\mathcal{X})^l \subset (g_1, \dots, g_s)$ für ein $l \in \mathbb{N}$, d. h. $g_1, \dots, g_s$ haben nur den Nullpunkt als gemeinsame Nullstelle. Dann gibt es eine* injektive *Abbildung $\varphi : \mathcal{X} \to S := \{1, \dots, s\}$, so daß für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt:*

$$g_{\varphi(x)} \notin k[\![\mathcal{X} \setminus \{x\}]\!],$$

d. h. die Variable x „kommt in $g_{\varphi(x)}$ vor“.

Beweis: Wir definieren $\Phi : \mathcal{X} \to 2^S : x \mapsto \{\, i \in S \mid g_i \notin k[\![\mathcal{X} \setminus \{x\}]\!] \,\}$. Für eine Teilmenge $\mathcal{Y}$ von $\mathcal{X}$ ist dann $\Phi(\mathcal{Y}) := \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \Phi(y)$ die Menge der i, so daß mindestens eine Variable aus $\mathcal{Y}$ in g_i vorkommt. Zu konstruieren ist eine injektive Abbildung $\varphi : \mathcal{X} \hookrightarrow S$ mit $\varphi(x) \in \Phi(x)$ für alle $x \in X$. Nach dem Heiratssatz (siehe z. B. [13]) genügt es zu zeigen:

$$\text{Für alle } \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \text{ gilt} \quad |\Phi(\mathcal{Y})| \geq |\mathcal{Y}|.$$

Sei also $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ und $\pi : k[\![\mathcal{X}]\!] \to k[\![\mathcal{Y}]\!]$ die kanonische Projektion. Aus $(\mathcal{X})^l \subseteq (g_1, \dots, g_s)$ folgt $(\mathcal{Y})^l = (\psi(\mathcal{X}))^l \subseteq (\pi(g_1), \dots, \pi(g_s))$. Sei nun $F := \{\, i \in S \mid \pi(g_i) \neq 0 \,\}$. Dann gilt $|F| \geq |\mathcal{Y}|$ (Krullscher Hauptidealsatz). Wegen $F \subseteq \Phi(\mathcal{Y})$ folgt die Behauptung.

Für ein $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathcal{X}} := \mathrm{Abb}(\mathcal{X}, \mathbb{N})$ sei $\mathcal{X}^\alpha := \prod_{x \in \mathcal{X}} x^{\alpha(x)}$ das zugehörige Monom. Der Träger $\mathrm{Tr}(f)$ einer Funktion $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathcal{X}}} a_\alpha \mathcal{X}^\alpha \in k[\![\mathcal{X}]\!]$ sei die Menge $\{\, \mathcal{X}^\alpha \in k[\![\mathcal{X}]\!] \mid a_\alpha \neq 0 \,\}$. Für ein $x \in \mathcal{X}$ sei ∂_x die formale Ableitung nach x. Weiter sei $S(f)$ das Ideal, das von f und seinen partiellen Ableitungen $\partial_x f$ erzeugt wird. Es ist unabhängig von Koordinatenwechsel und definiert die schematische Singularitätenmenge der Nullstellenmenge $\mathcal{V}(f)$ von f. In der ganzen Arbeit verstehen wir unter den Singularitäten von f immer die von $\mathcal{V}(f)$. Entsprechendes gilt für die Deformationen von f. Insbesondere hat f eine isolierte Singularität in 0, wenn $f \in (\mathcal{X})^2$ und $(\mathcal{X})^l \subseteq S(f)$für ein $l \in \mathbb{N}$ ist.

Lemma 1.2. *Sei $f \in k[\![\mathcal{X}]\!]$ mit einer isolierten Singularität in 0. Dann tritt für jede Teilmenge $\mathcal{Y}$ von $\mathcal{X}$ einer der folgenden Fälle ein:*

a) Es gibt ein $\mathcal{X}^\alpha \in \mathrm{Tr}(f)$ mit $\mathcal{X}^\alpha \in k[\![\mathcal{Y}]\!]$.

b) Es gibt eine injektive *Abbildung $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \backslash \mathcal{Y}$ und eine Abbildung $\psi : \mathcal{Y} \to \mathbb{N}^{\mathcal{Y}}$ mit $\mathcal{Y}^{\psi(y)} y\varphi(y) \in \mathrm{Tr}(f)$ für alle $y \in \mathcal{Y}$.*

Beweis: Angenommen a) ist falsch. Sei $\pi : k[\![X]\!] \to k[\![Y]\!]$ wieder die kanonische Projektion. Dann ist $\pi(f) = 0$ und für $y \in \mathcal{Y}$ gilt $\pi(\partial_y f) = \partial_y \pi(f) = 0$. Also gilt

$$(\pi(\partial_x f) \mid x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}) = \pi(S(f)) \supseteq \pi((\mathcal{X})^l) = (\mathcal{Y})^l.$$

Damit folgt b) aus Lemma 1.1 mit $\{ g_i \mid i \in S \} := \{ \pi(\partial_x f) \mid x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} \}$.

Sei nun $\delta : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{>0}$ beliebig. Dann induziert δ eine positive Graduierung von $k[\mathcal{X}] = \bigoplus_{d \in \mathbb{R}^{>0}} k[\mathcal{X}]_d$ mit $\deg x = \delta(x)$ für alle $x \in \mathcal{X}$. Ein graduierungserhaltender Endomorphismus σ von $k[\mathcal{X}]$ wird gegeben durch eine Abbildung $\bar{\sigma} : \mathcal{X} \to k[\mathcal{X}]$ mit $\bar{\sigma}(x) \in k[\mathcal{X}]_{\deg x}$.

Im folgenden sei $f \in k[\mathcal{X}]_1$, und f habe eine isolierte Singularität in 0.

Unser nächstes Ziel ist es, den quadratischen Teil von f abzuspalten.

Lemma 1.3. *Sei $A := \{ x \in \mathcal{X} \mid \deg x > \frac{1}{2} \}$. Dann gibt es einen graduierungserhaltenden Automorphismus σ von $k[\mathcal{X}]$, eine Injektion $\varphi : A \hookrightarrow \mathcal{X} \setminus A$ und ein $\bar{f} \in k[\mathcal{X} \setminus (A \cup \varphi(A))]$ mit $\sigma(f) = \bar{f} + \sum_{x \in A} x\varphi(x)$.*

Beweis durch Induktion nach $|A|$: Für $A = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei also $x_0 \in A$. Wegen $\deg x_0^2 > 1$ und $f \in k[\mathcal{X}]_1$ kommt x_0 in f höchstens linear vor, d.h. $f = x_0 g_1 + g_2$ mit $g_1, g_2 \in k[\mathcal{X} \setminus \{x_0\}]$. Wir wenden nun Lemma 1.2 mit $\mathcal{Y} := \{x_0\}$ an. Aussage a) ist unmöglich, also gibt es ein $x_1 = \varphi(x_0) \in \mathcal{X} \setminus \{x_0\}$ mit $x_1 \in \mathrm{Tr}(g_1)$, d.h. $g_1 = \lambda x_1 + g_3$ mit $\lambda \in k^*, g_3 \in k[\mathcal{X} \setminus \{x_0, x_1\}]$. Sei nun σ_1 der Automorphismus von $k[\mathcal{X}]$ mit

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} g_1 & \text{für } x = x_1 \\ x & \text{für } x \neq x_1. \end{cases}$$

Dann gilt $\sigma_1^{-1}(f) = x_0 x_1 + g_2$. Zerlege nun $g_2 = g_4 + x_1 g_5$ mit $g_4 \in k[\mathcal{X} \setminus \{x_0, x_1\}]$ und $g_5 \in k[\mathcal{X} \setminus \{x_0\}]$. Mit

$$\sigma_2(x) = \begin{cases} x_0 + g_5 & \text{für } x = x_0 \\ x & \text{für } x \neq x_0 \end{cases}$$

erhalten wir $\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}(f) = x_0 x_1 + g_4$. Mit Induktion folgt die Behauptung.

Aufgrund des Lemmas nehmen wir nun an, daß $\deg x \leq \frac{1}{2}$ ist für alle $x \in \mathcal{X}$. Setze $B := \{ x \in \mathcal{X} \mid \deg x = \frac{1}{2} \}$. Sei $\pi : k[\mathcal{X}] \to k[B]$ die kanonische Projektion. Dann ist $q := \pi(f)$ eine quadratische Form. Wir wollen nun q abspalten, was allerdings für $\mathrm{char}\, k = 2$ nicht ganz gelingt.

Lemma 1.4. *Es gibt einen graduierungserhaltenden Automorphismus σ von $k[\mathcal{X}]$, so daß einer der folgenden Fälle eintritt:*

a) $\sigma(f) = \bar{f} + q$ mit $\bar{f} \in k[\mathcal{X} \setminus B]_1$ und $q \in k[B]$ nicht ausgeartet.

b) $\mathrm{char}\, k = 2$ und es gibt ein $x_0 \in B$ mit $\sigma(f) = \bar{f}_1 + x_0 \bar{f}_2 + x_0^2 + \bar{q}$, wobei $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in k[\mathcal{X} \setminus B]$ und $\bar{q} \in k[B \setminus \{x_0\}]$ eine nicht ausgeartete quadratische Form ist.

Beweis: Nach der Theorie der quadratischen Formen [8] gibt es einen linearen Automorphismus σ_1 von $k[\mathcal{X}]$, so daß entweder

1) $q_1 := \sigma_1(q) = x_1\bar{x}_1 + \cdots + x_s\bar{x}_s$ oder
2) $q_1 := \sigma_1(q) = x_1\bar{x}_1 + \cdots + x_s\bar{x}_s + x_0^2$,

wobei die $x_i, \bar{x}_i$ paarweise verschieden sind.

Dann hat $\sigma_1(f)$ die Form $\sigma_1(f) = q_1 + \sum g_i x_i + \sum \bar{g}_i \bar{x}_i$ mit $g_i,\ \bar{g}_i \in k[\mathcal{X} \setminus B]$.

Mit

$$\sigma_2(x) = \begin{cases} x_i + \bar{g}_i & \text{für } x = x_i, \quad i \geq 1; \\ \bar{x}_i + g_i & \text{für } x = \bar{x}_i; \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält $\sigma_2^{-1}\sigma_1(f)$ die Form a) bzw. b). Für $\operatorname{char} k \neq 2$ kann man noch x_0 durch $x_0 + \frac{1}{2}g_0$ ersetzen und erhält a). Schließlich ist q nicht ausgeartet, weil f eine isolierte Singularität hat.

Wir haben also das Problem der Klassifikation quasihomogener, isolierter Singularitäten auf folgende Fälle zurückgeführt:

1.Fall: $\deg x < \frac{1}{2}$ für alle $x \in \mathcal{X}$.

2.Fall: $\operatorname{char} k = 2$, es gibt ein x_0 mit $\deg x_0 = \frac{1}{2}$, und die Grade aller anderen Variablen sind kleiner als $\frac{1}{2}$.

Sei nun $C := \mathcal{X} \setminus B = \{\, x \in \mathcal{X} \mid \deg x < \frac{1}{2} \,\}$. Der eigentliche Trick von Saito ist

Lemma 1.5. $$\sum_{x \in C} \deg x > \frac{1}{2}(|C| - 1) \Rightarrow |C| \leq 2.$$

Beweis: Wir wenden Lemma 1.2 auf $\mathcal{Y} = D := \{\, x \in \mathcal{X} \mid \frac{1}{3} < \deg x < \frac{1}{2} \,\}$ an. Wegen $f \in k[\mathcal{X}]_1$ kann a) nicht auftreten. Also bekommen wir für jedes $y \in D$ ein Monom $\psi(y) \in k[D]$ und ein Element $\varphi(y) \in \mathcal{X} \setminus D$, so daß $y\psi(y)\varphi(y) \in \operatorname{Tr}(f)$ ist. Weiterhin ist φ injektiv. Aus Gradgründen ist $\psi(y)$ eine Variable aus D und $\varphi(y) \neq x_0$. Aus $y\psi(y)\varphi(y) \in \operatorname{Tr}(f)$ für alle $y \in D$ folgt $\deg y + \deg \psi(y) + \deg \varphi(y) = 1$. Mit $E := C \setminus (D \cup \varphi(D))$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|C| - 1) &< \sum_{x \in C} \deg x = \sum_{x \in D} \deg x + \sum_{x \in D} \deg \varphi(x) + \sum_{x \in E} \deg x = \\ &= \sum_{x \in D} \deg x + \sum_{x \in D} \bigl(1 - \deg x - \deg \psi(x)\bigr) + \sum_{x \in E} \deg x = \\ &= \sum_{x \in D} \bigl(1 - \underbrace{\deg \psi(x)}_{>1/3}\bigr) + \sum_{x \in E} \underbrace{\deg x}_{\leq 1/3} \leq \frac{2}{3}|D| + \frac{1}{3}|E| = \frac{1}{3}|C| \Longrightarrow |C| < 3 \end{aligned}$$

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieses Abschnitts:

Theorem 1.6. *Sei $k[\mathcal{X}]$ positiv $\mathbb{R}$-graduiert und $f \in k[\mathcal{X}]$ homogen vom Grad d mit einer isolierten Singularität in 0. Es gelte*

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} \deg x > \frac{d}{2}(|\mathcal{X}| - 1). \qquad (*)$$

Dann gibt es einen graduierungserhaltenden Automorphismus σ von $k[\mathcal{X}]$, so daß $\sigma(f) = \bar{f} \oplus q$ ist, wobei q eine nichtausgeartete quadratische Form und $\bar{f}$ aus folgender Tabelle ist:

Typ	$p \neq 2$	$p = 2, \lvert\mathcal{X}\rvert \equiv 0(2)$	$p = 2, \lvert\mathcal{X}\rvert \equiv 1(2)$
$\mathtt{A}_n, n \geq 1$	x^{n+1}	$x^{n+1} + y^2 \quad \big(n \equiv 0(2)\big)$ $x^{\frac{n+1}{2}} y + y^2 \quad \big(n \equiv 1(2)\big)$	x^{n+1}
$\mathtt{D}_n, n \geq 4$	$x^{n-1} + xy^2$	$x^{\frac{n}{2}} y + xy^2 \quad \big(n \equiv 0(2)\big)$ $x^{n-1} + xy^2 \quad \big(n \equiv 1(2)\big)$	$x^{\frac{n}{2}} y + xy^2 + z^2 \quad \big(n \equiv 0(2)\big)$ $x^{\frac{n-1}{2}} z + xy^2 + z^2 \quad \big(n \equiv 1(2)\big)$
$\mathtt{E}_6$	$x^4 + y^3$	$x^4 + y^3$	$x^2 z + y^3 + z^2$
$\mathtt{E}_7$	$x^3 y + y^3$	$x^3 y + y^3$	$x^3 y + y^3 + z^2$
$\mathtt{E}_8$	$x^5 + y^3$	$x^5 + y^3$	$x^5 + y^3 + z^2$

Beweis: Wir können oBdA. $d = 1$ annehmen. Da weiterhin das Abspalten des quadratischen Teils (Lemma 1.4 und 1.5) verträglich mit Ungleichung $(*)$ ist, können wir einen der folgenden Fälle annehmen:

a) $\forall x \in \mathcal{X} : \deg x < \frac{1}{2}$ und $|\mathcal{X}| \leq 2$ oder

b) $\operatorname{char} k = 2$, $\mathcal{X} = D \cup \{x_0\}$, $|D| \leq 2$, $\deg x_0 = \frac{1}{2}$ und $\forall x \in D : \deg x < \frac{1}{2}$.

Was folgt, sind einfache Rechnungen, und wir behandeln nur den Fall b), denn a) geht analog und ist sogar noch einfacher.

i) $D = \emptyset$: $f = x_0^2$: $\mathtt{A}_1$.

ii) $D = \{x_1\}$: Dann ist

$$f = \begin{cases} x_0^2 + \alpha x_0 x_1^n & \text{oder} \\ x_0^2 + \alpha x_0 x_1^n + \beta x_1^{2n} & \text{oder} \\ x_0^2 + \alpha x_1^n & \text{mit } \alpha, \beta \neq 0. \end{cases}$$

Der erste Fall führt auf $\mathtt{A}_{2n-1}$. Im zweiten sei γ eine Lösung der Gleichung $\gamma^2 + \alpha\gamma + \beta = 0$. Dann führt die Substitution $x_0 \mapsto x_0 + \gamma x_1^n$ auf den ersten Fall. Im dritten Fall hat f nur dann eine isolierte Singularität, wenn n ungerade ist und stellt dann den Fall $\mathtt{A}_{n-1}$ dar.

iii) $D = \{x_1, x_2\}$: Sei $r_i := \deg x_i$ mit $r_1 + r_2 > \frac{1}{2}$. Nach Lemma 1.2 mit $\mathcal{Y} = \{x_1\}$ tritt einer der folgenden drei Fälle ein:

$$1) \quad x_1^m \in \operatorname{Tr}(f) \qquad 2) \quad x_0 x_1^m \in \operatorname{Tr}(f) \qquad 3) \quad x_1^m x_2 \in \operatorname{Tr}(f)$$

Entsprechend mit $\mathcal{Y} = \{x_2\}$:

$$1') \quad x_2^n \in \operatorname{Tr}(f) \qquad 2') \quad x_0 x_2^n \in \operatorname{Tr}(f) \qquad 3') \quad x_1 x_2^n \in \operatorname{Tr}(f)$$

Dies führt auf folgende sechs Fälle, wovon wir auch wieder nur den ersten ausführlich behandeln:

$11'$: $r_1 = \frac{1}{m}$, $r_2 = \frac{1}{n}$; $r_1 + r_2 > \frac{1}{2} \Longrightarrow (m-2)(n-2) < 4 \overset{(\text{o.E. } m \leq n)}{\Longrightarrow} (m,n) \in \{(3,3); (3,4); (3,5)\}$. Im ersten Fall hat f die Gestalt $x_0^2 + x_1^3 + \alpha x_1^2 x_2 + \beta x_1 x_2^2 + x_2^3$. Durch einen linearen Koordinatenwechsel in x_1 und x_2 kann man f auf die Form $x_0^2 + x_1^3$, $x_0^2 + x_1^2 x_2$ oder $x_0^2 + x_1 x_2 (x_1 + x_2)$ bringen. Die ersten beiden haben keine isolierte Singularitäten, während die letzte vom Typ $\mathtt{D}_4$ ist. Für $(m,n) = (3,4)$ hat f die Form $x_0^2 + x_1^3 + x_2^4 + \alpha x_0 x_2^2$, die sich leicht zur Normalform einer $\mathtt{E}_6$-Singularität transformieren läßt. Der Fall $(m,n) = (3,5)$ führt auf $\mathtt{E}_8$.

$12'$: Hier ist $(m,n) = (3,2)$. Dies führt auf $\mathtt{E}_6$.

$13'$: Hier ist $n = 2$ ($\Rightarrow \mathtt{D}_{m+1}$) oder $(m,n) = (3,3)$ ($\Rightarrow \mathtt{E}_7$).

$22'$: Dieser Fall kann nicht auftreten.

$23'$: Hier ist $n = 2$, was auf $\mathtt{D}_{2m+1}$ führt.

$33'$: Hier ist ebenfalls $m = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathtt{D}_{2n}$.

Damit ist das Theorem bewiesen.

Definition: Die Singularitäten aus Theorem 1.6 heißen *einfach, quasihomogen.*

Sei $\zeta := \sum_{x\in\mathcal{X}} \deg x - \frac{d}{2}(|\mathcal{X}|-1)$. Der Beweis des Theorems zeigte, daß ζ/d eine Invariante der Singularität ist. Diese reicht jedoch noch nicht aus, um den Typ eindeutig zu bestimmen. Wir nehmen dazu aus $\mathcal{X}$ alle Paare heraus, deren Grade sich zu d ergänzen. Wenn $|\mathcal{X}|$ ungerade ist, wie es in der späteren Anwendung sein wird, dann bleibt noch mindestens eine Variable übrig. Sei x diejenige minimalen Grades. Dann ist $\deg x/d$ ebenfalls eine Invariante der Singularität, die zusammen mit ζ/d ihren Typ eindeutig festlegt, wie folgende Tabelle zeigt:

Typ:	$\mathtt{A}_n$	$\mathtt{D}_n$	$\mathtt{E}_6$	$\mathtt{E}_7$	$\mathtt{E}_8$
ζ/d:	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{2n-2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{30}$
$\deg x/d$:	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{5}$

§2. Die adjungierte Darstellung

Sei G eine einfache algebraische Gruppe vom adjungierten Typ und $\tilde{G}$ ihre einfach zusammenhängende Überlagerung. Wir bezeichnen mit $\mathbf{g}$ bzw. $\tilde{\mathbf{g}}$ die Liealgebra von G bzw. $\tilde{G}$. Die Gruppe G operiert dann durch Konjugation auf $\mathbf{g}$ und wegen $G = \tilde{G}/\mathrm{Z}(\tilde{G})$ auch auf $\tilde{\mathbf{g}}$. Dabei ist $\mathrm{Z}(\tilde{G})$ das schematische Zentrum von $\tilde{G}$. Diese beiden Operationen unterscheiden sich allerdings nur bei kleiner Charakteristik, wenn nämlich das Zentrum von $\tilde{G}$ nicht reduziert ist. Damit operiert auch die Liealgebra $\mathbf{g}$ auf $\tilde{\mathbf{g}}$. Diese Wirkung bezeichnen wir auch mit der Lieklammer: $[x,\tilde{x}] \in \tilde{\mathbf{g}}$, $(x\in\mathbf{g}, \tilde{x}\in\tilde{\mathbf{g}})$.

Wir wählen nun in G eine Boreluntergruppe B mit Liealgebra $\mathbf{b}$ und in B einen maximalen Torus T. Mit Δ bezeichnen wir die Menge der Wurzeln und mit W die Weylgruppe. Die Gewichte von T auf $\mathbf{b}$ seien dabei die positiven Wurzeln Δ^+. Die Wurzeln maximaler Länge heißen in folgenden lang, die restlichen kurz. Bei homogenen Wurzelsystemen sind also alle Wurzeln lang. Weiter sei $\Pi := \{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\} \subseteq \Delta^+$ die Menge der einfachen Wurzeln. Die Liealgebra $\mathbf{g}$ zerfällt dann in Gewichtsräume: $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta}\mathbf{g}_\alpha$. Die Wurzeln α können wir als Linearformen auf $\mathbf{g}_0 = \mathrm{Lie}\,T$ bzw. auf $\tilde{\mathbf{g}}_0$ auffassen. Damit bildet Π eine Basis von $\mathbf{g}_0^*$, während die Fundamentalgewichte λ_i eine Basis von $\tilde{\mathbf{g}}_0^*$ induzieren (vgl. [4] A-2.6). Sei dann $\lambda_j^\vee \in \mathbf{g}_0$, definiert durch $\alpha_i(\lambda_j^\vee) = \delta_{ij}$, die duale Basis zu Π und entsprechend $\alpha_j^\vee \in \tilde{\mathbf{g}}_0$ mit $\lambda_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$.

Der kanonische Homomorphismus $\tilde{G} \to G$ induziert eine Abbildung $\pi : \tilde{\mathbf{g}} \to \mathbf{g}$, so daß wir die $\alpha_j^\vee$ auch als Elemente von $\mathbf{g}$ auffassen können. Sie brauchen dann allerdings nicht mehr linear unabhängig zu sein. Der Kern von π ist genau das Zentrum von $\tilde{\mathbf{g}}$ und damit enthalten in $\tilde{\mathbf{g}}_0$.

Wir wählen nun eine Chevalley-Basis von $\mathbf{g}$, d.h. Erzeuger x_α von $\mathbf{g}_\alpha$ die folgende Eigenschaften haben (siehe etwa [17] oder [4] A):

$$\begin{aligned} [x_{\alpha_i}, x_{-\alpha_i}] &= \alpha_i^\vee, && \text{für } \alpha_i \in \Pi, \\ [x_\alpha, x_\beta] &= \pm N_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}, && \text{wenn } \alpha+\beta\in\Delta, \end{aligned}$$

wobei $N_{\alpha\beta} := \min\{q \in \mathbb{N} \mid \alpha - q\beta \notin \Delta\}$. Entsprechend lassen sich auch Elemente $\tilde{x}_\alpha$ in $\tilde{\mathbf{g}}$ finden. Es gilt dann $\pi(\tilde{x}_\alpha) = x_\alpha$. Damit gelten dann analoge Relationen für die Operation von $\mathbf{g}$ auf $\tilde{\mathbf{g}}$. Weil eine lange Wurzel α nur am Ende der β-Leiter $\{\cdots,\alpha-\beta,\alpha,\alpha+\beta,\cdots\}$ stehen kann, ist $N_{\alpha\beta} = 1$, wenn α lang ist. Also gilt:

Lemma 2.1. *$[x_\alpha, \tilde{x}_\beta] \neq 0$, wenn $\alpha+\beta$ eine Wurzel und α oder β lang ist.*

Setze zur Abkürzung $\tilde{x}_0 := \tilde{x}_{-\alpha_0}$, wobei α_0 die höchste Wurzel ist. Das zentrale Objekt dieser Arbeit ist nun die Bahn X von $k\tilde{x}_0$ im projektiven Raum $\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{g}})$ unter der Gruppe G. Da $\tilde{x}_0$ ein Tiefstgewichtsvektor von $\tilde{\mathbf{g}}$ ist, ist die Bahn X projektiv und damit abgeschlossen. Sei P die (schematische) Standgruppe von $k\tilde{x}_0$. Dann folgt aus Lemma 2.1:

Lemma 2.2. *P ist glatt, d.h. P und die Standalgebra von $k\tilde{x}_0$ in $\mathbf{g}$ haben die gleiche Dimension. Insbesondere ist $\mathbf{g}\tilde{x}_0/k\tilde{x}_0$ der Tangentialraum von X in $k\tilde{x}_0$.*

Wir untersuchen im folgenden das lineare System der Hyperebenenschnitte von X in $\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{g}})$.

Lemma 2.3. *Die Einbettung $X \hookrightarrow \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{g}})$ ist vollständig, d. h. die Restriktionsabbildung*

$$\varrho : \tilde{\mathbf{g}}^* = H^0(\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{g}}), \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{g}})}(1)) \to H^0(X, \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{g}})}(1)|_X)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß X in keinem echten linearen Teilraum enthalten ist. Sei $V := \langle X \rangle_k \subseteq \tilde{\mathbf{g}}$. Zu zeigen ist $V = \tilde{\mathbf{g}}$. Mit der Operation der Weylgruppe erhält man $\tilde{\mathbf{g}}_\alpha \subseteq V$ für alle langen Wurzeln α. Wenn es Wurzeln unterschiedlicher Länge gibt, dann wähle eine Wurzel β, so daß $\alpha = \beta - \alpha_0$ eine kurze Wurzel ist. Dann ist $N_{\beta,-\alpha_0} = \pm 1$, also $[x_\beta, \tilde{x}_0] \neq 0$. Damit gilt $\tilde{\mathbf{g}}_\alpha \subseteq V$ auch für die kurzen Wurzeln α. Wegen $[x_{\alpha_i}, \tilde{x}_{-\alpha_i}] = \alpha_i^\vee$, und weil die $\alpha_i^\vee$ eine Basis von $\tilde{\mathbf{g}}_0$ bilden, gilt auch $\tilde{\mathbf{g}}_0 \subseteq V$ und damit $V = \tilde{\mathbf{g}}$. Dies heißt nun nichts anderes, als daß ϱ injektiv ist. Für $p = 0$ ist ϱ eine injektive Abbildung zwischen zwei irreduziblen G-Moduln (Borel-Weil), also ein Isomorphismus. Aus dem Kempfschen Verschwindungssatz ([14]) folgt, daß die Dimension von $H^0(X, \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{g}})}(1)|_X)$ unabhängig von der Charakteristik des Körpers k ist. Also haben beide Seiten dieselbe Dimension, und ϱ ist ein Isomorphismus.

Sei nun $L := \{\|\alpha\|^2 \mid \alpha \in \Delta\}$ und

$$c(\Delta) := \frac{\max L}{\min L} = \begin{cases} 1, & \text{für } \Delta = \mathtt{A}_n, \mathtt{D}_n, \mathtt{E}_n; \\ 2, & \text{für } \Delta = \mathtt{B}_n, \mathtt{C}_n, \mathtt{F}_4; \\ 3, & \text{für } \Delta = \mathtt{G}_2. \end{cases}$$

Dann gilt $N_{\alpha\beta} \in \{1, c(\Delta)\}$, wenn $\alpha + \beta$ eine lange Wurzel ist.

Wir betrachten nun den G-Modul $\mathbf{g}^*$, der offenbar dieselbe Gewichtszerlegung wie $\mathbf{g}$ hat. Da P auch $(\mathbf{g}^*)_{-\alpha_0}$ stabilisiert, gibt es eine kanonische Abbildung $X \to \mathbf{P}(\mathbf{g}^*)$. Sei nun wieder β eine Wurzel, so daß $\alpha = \alpha_0 - \beta$ kurz ist (wenn es kurze Wurzeln gibt) und $x^*_{-\alpha_0}$ ein Erzeuger von $(\mathbf{g}^*)_{-\alpha_0}$. Dann gilt $(x_\beta \cdot x^*_{-\alpha_0})(x_\alpha) = x^*_{-\alpha_0}([x_\beta, x_\alpha]) = \pm N_{\beta\alpha} x^*_{-\alpha_0}(x_{\alpha_0}) \neq 0$ falls $p \neq c(\Delta)$ ist. Also liegen wieder alle Wurzelräume von $\mathbf{g}^*$ im Untermodul, der von $x^*_{-\alpha_0}$ erzeugt wird. Für alle $h \in \mathbf{g}_0$ und alle $\alpha \in \Pi$ gilt weiterhin: $(x_{-\alpha} \cdot x^*_\alpha)(h) = \alpha(h) x^*_\alpha(x_{-\alpha})$. Da Π eine Basis von $\mathbf{g}^*_0$ bildet, kann man wieder folgern:

Lemma 2.4. *Für $p \neq c(\Delta)$ ist die Abbildung $X \to \mathbf{P}(\mathbf{g}^*)$ eine vollständige Einbettung. Insbesondere sind $\mathbf{g}^*$ und $\tilde{\mathbf{g}}$ zueinander isomorph als G-Moduln.*

Wir haben also in diesem Fall eine *nichtausgeartete Paarung* zwischen $\mathbf{g}$ und $\tilde{\mathbf{g}}$, die wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnen.

Sei $\mathcal{I}$ die k-Algebra der G-invarianten Polynome auf $\mathbf{g}$ und $\pi : \mathbf{g} \to \mathbf{g}//G := \operatorname{Spec} \mathcal{I}$ der Quotientenmorphismus. Dann ist $\mathcal{N} := \pi^{-1}(\pi(0))$ die Menge der nilpotenten Elemente. In $\mathcal{N}$ gibt es eine offene Bahn ([12]), deren Elemente *regulär nilpotent* genannt werden. Für das nächste Lemma brauchen wir eine weitere Einschränkung der Charakteristik.

Definition. Sei Δ ein irreduzibles Wurzelsystem. Eine Primzahl p heißt *gut* für Δ, wenn gilt:

$p \neq 2$ für $\Delta = \mathtt{B}_n, \mathtt{C}_n, \mathtt{D}_n$;
$p \neq 2, 3$ für $\Delta = \mathtt{E}_6, \mathtt{E}_7, \mathtt{F}_4, \mathtt{G}_2$;
$p \neq 2, 3, 5$ für $\Delta = \mathtt{E}_8$.

Weiter heißt p *sehr gut* für Δ, wenn zusätzlich gilt:

$p \not| \, n+1$ für $\Delta = \mathtt{A}_n$.

Lemma 2.5. *Sei* $\operatorname{char} k = p$ *sehr gut für* Δ*. Dann ist* π *in regulär nilpotenten Elementen glatt.*

Beweis: G operiere auf sich selbst durch Konjugation. Dann gibt es einen G-äquivarianten in der 1 étalen Morphismus $G \to \mathbf{g}$, so daß das folgende Diagramm in einer Umgebung der Null kartesisch ist (Springer, vgl. [3]):

$$\begin{array}{ccc} G & \to & \mathbf{g} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G//G & \to & \mathbf{g}//G \end{array}$$

Damit ist das Lemma auf die entsprechende Aussage für G und regulär unipotente Elemente zurückgeführt, die in [4] E-III 2.5 bewiesen ist.

§3. Einfache Gruppen und einfache Singularitäten

In diesem Kapitel ist die Charakteristik p von k beliebig. Daher können wir $V := \tilde{\mathbf{g}}^*$ nicht mit $\mathbf{g}$ identifizieren. V ist wieder ein G-Modul mit derselben Gewichtszerlegung wie $\tilde{\mathbf{g}}$ und $\mathbf{g}$. Die Paarung zwischen V und $\tilde{\mathbf{g}}$ wird mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet.

Jedem Element $y \in V \setminus \{0\}$ läßt sich dann die Hyperebene $H_y = \{k\tilde{x} \in \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{g}}) \mid \langle y, \tilde{x} \rangle = 0\}$ sowie der Hyperebenenschnitt $X_y = X \cap H_y$ zuordnen. In diesem Abschnitt untersuchen wir einen ganz speziellen Hyperebenenschnitt auf Singularitäten. Der allgemeine Fall wird dann in den folgenden Abschnitten behandelt.

Wie eben erwähnt sind die Wurzeln von G genau die Gewichte von V. Für $i = 1, \ldots, s$ sei nun x_i ein Erzeuger des Gewichtsraumes $V_{-\alpha_i}$ und $y_0 := \sum_i x_i$. Wenn $V \cong \mathbf{g}$ ist, dann ist y_0 ein regulär nilpotentes Element (vgl. [17]).

Definition: Sei Δ ein Wurzelsystem, ausgestattet mit einer W-invarianten Metrik $(\cdot|\cdot)$, und $\Pi \subset \Delta$ sei eine Menge einfacher Wurzeln. Dann bezeichne Δ^* das Unterwurzelsystem von Δ, das von den einfachen Wurzeln maximaler Länge erzeugt wird.

Die folgende Tabelle führt Δ^* und $\dim X$ für irreduzible Wurzelsysteme auf:

Δ:	$\mathtt{A}_n$	$\mathtt{B}_n$	$\mathtt{C}_n$	$\mathtt{D}_n$	$\mathtt{E}_6$	$\mathtt{E}_7$	$\mathtt{E}_8$	$\mathtt{F}_4$	$\mathtt{G}_2$
Δ^*:	$\mathtt{A}_n$	$\mathtt{A}_{n-1}$	$\mathtt{A}_1$	$\mathtt{D}_n$	$\mathtt{E}_6$	$\mathtt{E}_7$	$\mathtt{E}_8$	$\mathtt{A}_2$	$\mathtt{A}_1$
$\dim X$:	$2n-1$	$4n-5$	$2n-1$	$4n-7$	21	33	57	15	5

Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist nun:

Theorem 3.1. *Der Hyperebenenschnitt X_{y_0} hat genau eine Singularität und zwar in $k\tilde{x}_0 = \tilde{\mathbf{g}}_{-\alpha_0}$. Diese Singularität ist einfach, quasihomogen vom Typ Δ^*.*

Beweis: Da G von adjungiertem Typ ist, gibt es eine Einparameteruntergruppe $\varrho : k^* \to T \subseteq G$ mit $\alpha_i(\varrho(t)) = t$ für alle einfachen Wurzeln α_i. Es gilt dann $\varrho(t)y_0 = t^{-1}y_0$ für alle $t \in k$. Daher sind X_{y_0} und $\operatorname{Sing} X_{y_0}$ beide $\varrho(k^*)$-stabil. Weil ϱ eine reguläre Einparametergruppe ist, gilt:

$$X^{\varrho(k^*)} = X^T = \{k\tilde{x}_\alpha \mid \alpha \text{ ist lange Wurzel}\} = W(k\tilde{x}_0).$$

Insbesondere gibt es also nur endlich viele Fixpunkte. Wir zeigen nun, daß es nur einen singulären Fixpunkt nämlich $k\tilde{x}_0$ gibt. Daraus folgt der erste Teil des Theorems, denn angenommen es gäbe einen weiteren singulären Punkt x von X_{y_0}. Dieser wäre nicht k^*-stabil und $\lim_{t\to 0} tx$ und $\lim_{t\to\infty} tx$ wären zwei verschiedene singuläre k^*-Fixpunkte. Sei also $\alpha \in \Delta$ eine lange Wurzel.
1.Fall: α ist eine einfache Wurzel. Nach Definition von y_0 gilt dann $\langle y_0, \tilde{x}_\alpha\rangle \neq 0$ d.h. $k\tilde{x}_\alpha$ liegt gar nicht in X.
2.Fall: α ist keine einfache Wurzel und ist nicht $-\alpha_0$. Dann gibt es eine einfache Wurzel α_i mit $\beta = \alpha_i - \alpha \in \Delta$. Da α lang ist, gilt $[x_\beta, \tilde{x}_\alpha] \neq 0$ und somit $\langle y_0, [x_\beta, \tilde{x}_\alpha]\rangle \neq 0$, d.h. die Hyperebene H_{y_0} ist im Punkt $k\tilde{x}_\alpha$ nicht tangential an X. Also ist X_{y_0} nicht singulär in $k\tilde{x}_\alpha$.
3.Fall: $\alpha = -\alpha_0$. Dann ist $\langle y_0, \tilde{x}_\alpha\rangle = \langle y_0, [x_\beta, \tilde{x}_\alpha]\rangle = 0$ für alle $\beta \in \Delta$. Nach Lemma 2.2 ist $\mathbf{g}\tilde{x}_0/k\tilde{x}_0$ der Tangentialraum an die Bahn durch $k\tilde{x}_0$. Also ist X_{y_0} tatsächlich in $k\tilde{x}_{-\alpha_0}$ singulär.

Um diese Singularität zu identifizieren benützen wir das Kriterium aus §1. Sei U das unipotente Radikal der P gegenüberliegenden parabolischen Untergruppe. Die Liealgebra von U ist $\sum_{\alpha\in\Delta_0} \mathbf{g}_\alpha$ mit $\Delta_0 := \{\alpha \in \Delta \mid (\alpha|\alpha_0) > 0\}$. Dann ist $\psi : U \to X : u \mapsto u(k\tilde{x}_0)$ eine offene Einbettung, und wir betrachten $X' := \psi^{-1}(X_{y_0}) = \{u \in U \mid f(u) = 0\}$, wobei $f(u) := \langle y_0, u\tilde{x}_0\rangle$ ist. Sei U_α die eindimensionale unipotente Untergruppe von G, die zur Wurzel α gehört. Dann ist U T-isomorph zum direkten Produkt der U_α mit $\alpha \in \Delta_0$. Dies liefert eine Vektorraumstruktur auf U, und $\varrho(k^*)$ operiert linear mit den Gewichten $\{\alpha(\varrho) \mid \alpha \in \Delta_0\}$.

Um nun Theorem 1.6 anwenden zu können, muß man den Grad von f, die Anzahl der Variablen und die Summe ihrer Grade kennen. Wir fassen das Ergebnis im folgenden Lemma zusammen (dabei ist $2\delta = \sum\limits_{\alpha\in\Delta^+} \alpha$ und wie üblich $\langle\alpha|\alpha_0\rangle := 2\frac{(\alpha|\alpha_0)}{(\alpha_0|\alpha_0)}$):

Lemma 3.2.
a) $d := \deg f = \alpha_0(\varrho) + 1$.
b) Die Summe σ der Grade ist $\langle\delta|\alpha_0\rangle\alpha_0(\varrho)$.
c) $n := \dim U = \dim X = 2\langle\delta|\alpha_0\rangle - 1$. *Insbesondere ist* $\dim X$ *immer ungerade.*

Beweis:
a) Es gilt: $f(\varrho(t)\cdot u) = \langle y_0, \varrho(t)u\varrho(t)^{-1}\tilde{x}_0\rangle = \langle\varrho(t)^{-1}y_0, u\varrho(t)^{-1}\tilde{x}_{-\alpha_0}\rangle = t^{1+\alpha_0(\varrho)}f(u)$.
b) $\sigma = \sum_{\alpha\in\Delta_0} \alpha(\varrho)$. Nach einer Formel von Dynkin [10] gilt für alle $h, h' \in Y(T)\otimes\mathbb{R}$: $(Y(T) := \operatorname{Hom}(k^*, T))$

$$\sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(h)\alpha(h') = (\alpha_0|\alpha_0 + 2\delta)(h|h').$$

Sei nun $h^* \in X(T) \otimes \mathbb{R}$ mit $h^*(h') = (h|h')$ für alle h'. Dann folgt

$$\sum_{\alpha>0} \alpha(h)\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_0|\alpha_0 + 2\delta)h^*$$

und mit $h^* = \alpha_0$

$$\sum_{\alpha>0} (\alpha|\alpha_0)\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_0|\alpha_0 + 2\delta)\alpha_0.$$

Daraus erhält man:

$$\sum_{\alpha>0} \langle\alpha|\alpha_0\rangle\alpha = (1 + \langle\delta|\alpha_0\rangle)\alpha_0.$$

Nun gilt für alle $\alpha > 0$: $\langle\alpha|\alpha_0\rangle \in \{0, 1, 2\}$, und $\langle\alpha|\alpha_0\rangle = 2 \Rightarrow \alpha = \alpha_0$. Also:

$$\sum_{\langle\alpha|\alpha_0\rangle>0} \alpha = \sum_{\alpha>0} \langle\alpha|\alpha_0\rangle\alpha - \alpha_0 = \langle\delta|\alpha_0\rangle\alpha_0$$

und somit

$$\sigma = \sum_{\langle\alpha|\alpha_0\rangle>0} \alpha(\varrho) = \langle\delta|\alpha_0\rangle\alpha_0(\varrho).$$

c) Es ist

$$n = |\Delta_0| = \sum_{\alpha\in\Delta_0} 1 = \sum_{\alpha>0} \langle\alpha|\alpha_0\rangle - 1 = 2\langle\delta|\alpha_0\rangle - 1.$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Daraus erhalten wir

$$\zeta := \sigma - \frac{d}{2}(n-1) = \langle\delta|\alpha_0\rangle\alpha_0\big(\varrho) - (\alpha_0(\varrho) + 1\big)\big(\langle\delta|\alpha_0\rangle - 1\big) = \alpha_0(\varrho) - \langle\delta|\alpha_0\rangle + 1.$$

Nun gilt $\alpha_0(\varrho) \geq \langle\delta|\alpha_0\rangle$, denn:
$\alpha_0(\varrho) \geq \langle\delta|\alpha_0\rangle \Leftrightarrow (\eta|\alpha_0) \geq 0$, mit $\eta := \varrho^* - \frac{2\delta}{(\alpha_0|\alpha_0)}$, und es gilt $(\eta|\alpha_i) = (\varrho^*|\alpha_i) - 2\frac{(\delta|\alpha_i)}{(\alpha_0|\alpha_0)} = 1 - \frac{(\alpha_i|\alpha_i)}{(\alpha_0|\alpha_0)} \geq 0$.
Es folgt $\zeta > 0$.

Damit wissen wir nach Theorem 1.6, daß die Singularität einfach ist. Es bleibt ihre Identifikation. Wie am Ende von §1 bemerkt genügt es dazu ζ/d und $\deg x/d$ zu bestimmen. Dabei ist $\deg x$ der kleinste Grad, der übrigbleibt, wenn man aus der Menge aller Grade die Paare herausnimmt, die sich zu d ergänzen. Wir berechnen die beiden Werte für jedes irreduzible Wurzelsystem. Für homogene Wurzelsysteme ist $\varrho^* = \delta$ und damit $\zeta = 1$. Die Grade sind einfach $\alpha(\varrho)$, wobei α alle Wurzeln aus Δ_0 durchläuft. Für $\alpha = \sum_i m_i\alpha_i$ ist $\alpha(\varrho) = \sum_i m_i$. Wir nennen dies die Stufe von α und setzen $M_i := \{\alpha \in \Delta_0 \mid \alpha(\varrho) = i\}$.

Im folgenden numerieren wir die einfachen Wurzeln der Wurzelsysteme wie in Bourbaki ([6] Planches).

$\mathtt{A}_n$: Die Stufe von α_0 ist n, d.h. $d = n + 1$. Für $n = 1$ gibt es nur eine Variable und diese hat den Grad 1. Für $n > 1$ enthält Δ_0 zwei Wurzeln der Stufe 1 nämlich α_1 und α_n, aber nur eine der Stufe n, nämlich α_0. Also ist $\deg x = \zeta = 1$ und es liegt eine $\mathtt{A}_n$-Singularität vor.

$\mathtt{B}_n$: $(n > 2)$; $d = 2n$, $\zeta = 2$. $M_1 = \{\alpha_2\}$, $M_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3\}$, $M_{2n-2} = \{\alpha_0 - \alpha_2\}$, $M_{2n-1} = \{\alpha_0\}$. Also ist $\deg x = 2$ und es liegt eine $\mathtt{A}_{n-1}$-Singularität vor.

$\mathtt{C}_n$: $(n \geq 2)$; $d = 2n$, $\zeta = n$. Also ist $\zeta/d = \frac{1}{2}$, d.h. X_{y_0} hat eine $\mathtt{A}_1$-Singularität.

$\mathtt{D}_n$: $(n \geq 4)$; $d = 2n - 2$, $\zeta = 1$, $M_1 = \{\alpha_2\}$, $M_{2n-3} = \{\alpha_0\}$.

$$M_2 = \begin{cases} \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3\} & \text{für } n > 4 \\ \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_4\} & \text{für } n = 4 \end{cases}$$

$M_{2n-4} = \{\alpha_0 - \alpha_2\}$. Damit ist $\deg x = 2$ und es liegt eine $\mathtt{D}_n$-Singularität vor.

$\mathtt{E}_n$: $n = 6, 7, 8$; $d = 12, 18, 30$; $\zeta = 1$. Es gibt nur je eine Wurzel der Stufe 1, 2, $d-2$ bzw. $d-1$. Damit ist $\deg x > 2$, und die Singularität ist nicht vom Typ $\mathtt{A}_n$ oder $\mathtt{D}_n$, also vom Typ $\mathtt{E}_n$.

$\mathtt{F}_4$: $d = 12$, $\zeta = 4$. Daraus folgt schon, daß eine $\mathtt{A}_2$-Singularität vorliegt.

$\mathtt{G}_2$: $d = 6, \zeta = 3$. Also hat X_{y_0} eine $\mathtt{A}_1$-Singularität.

Damit ist das Theorem vollständig bewiesen.

§4. Die Nachbarsingularitäten

In diesem Abschnitt nehmen wir $\operatorname{char} k \neq c(\Delta)$ an, d.h. $p \neq 2$ für $\Delta = \mathtt{B}_n, \mathtt{C}_n, \mathtt{F}_4$ und $p \neq 3$ für $\Delta = \mathtt{G}_2$. Dann ist $\mathbf{g}$ der Dualraum von $\tilde{\mathbf{g}}$ als G-Modul. Der Vorteil ist, daß wir auf $\mathbf{g}$ die Jordanzerlegung zur Verfügung haben: Jedes Element $y \in \mathbf{g}$ läßt sich eindeutig zerlegen, $y = y_h + y_n$, wobei y_h und y_n kommutieren und halbeinfach bzw. nilpotent sind.

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Singularitäten von X_y für ein allgemeines $y \in \mathbf{g}$ zu untersuchen. Durch Konjugation können wir annehmen, daß $y_h \in \mathbf{g}_0$ und $y_n \in \mathbf{n}^- := \bigoplus_{\alpha<0} \mathbf{g}_\alpha$ ist. Sei

$$\Delta(y_h) := \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(y_h) = 0\},$$

wobei α als Linearform auf $\mathbf{g}_0$ aufgefaßt wird. Sei weiter $L := C_G(y_h)^0$. Dann ist $\Delta(y_h)$ genau das Wurzelsystem von L. Wir zerlegen nun

$$\Delta(y_h) = \Delta_1 \perp \ldots \perp \Delta_m$$

in paarweise orthogonale, irreduzible Unterwurzelsysteme. Entsprechend zerlegt sich auch $L = L_1' \cdots L_m'$ mit $L_i' \cap L_j' = T$ für $i \neq j$. Sei nun $L_i := L_i'/Z(L_i')$, wobei $Z(L_i')$ das schematische Zentrum von L_i' ist, und $\tilde{L}_i$ die einfach zusammenhängende Überlagerung von L_i. Da offenbar auch $p \neq c(\Delta_i)$ gilt, ist $\mathbf{l}_i := \operatorname{Lie} L_i$ dual zu $\tilde{\mathbf{l}}_i := \operatorname{Lie} \tilde{L}_i$. Wir definieren noch $\tilde{\mathbf{l}}_i' := \tilde{\mathbf{g}}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_i} \tilde{\mathbf{g}}_\alpha$, $\tilde{\mathbf{l}}' := \tilde{\mathbf{g}}^{y_h} = \sum \tilde{\mathbf{l}}_i'$ und entsprechend $\mathbf{l}_i' := \operatorname{Lie} L_i' = \mathbf{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_i} \mathbf{g}_\alpha$. Dies liefert folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\mathbf{l}}_i & \to & \tilde{\mathbf{l}}_i' & \to & \mathbf{l}_i' & \to & \mathbf{l}_i \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \tilde{\mathbf{g}} & \to & \mathbf{g} & & \end{array}$$

Sei nun X^i die Bahn des Höchstgewichtsvektors in $\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{l}}_i)$. Da X^i nur aus nilpotenten Elementen besteht, während der Kern der natürlichen Abbildung $\tilde{\mathbf{l}}_i \to \tilde{\mathbf{l}}_i'$ nur halbeinfache Elemente enthält (er liegt ja im Zentrum), gibt es einen kanonischen Morphismus $\varphi_i : X^i \to \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{l}}_i') \subseteq \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{g}})$.

Lemma 4.1. *Jeder singuläre Punkt von X_y liegt in $\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{l}}')$.*

Beweis: Sei $\tilde{x} \in X_y$ singulär. Dann gilt $0 = \langle y, [\mathbf{g}, \tilde{x}]\rangle = \langle [\mathbf{g}, y], \tilde{x}\rangle = \langle \mathbf{g}, [y, \tilde{x}]\rangle \Rightarrow [y, \tilde{x}] = 0 \Rightarrow [y_h, \tilde{x}] = 0$, d.h. $\tilde{x} \in \tilde{\mathbf{l}}'$.

Lemma 4.2. $X \cap \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{l}}') = \bigcup_{i\in I_0} \varphi_i(X^i)$, *wobei* $I_0 = \{i \mid \Delta_i$ *enthält lange Wurzeln*$\}$.

Beweis: „$\supseteq$“: Sei $\alpha \in \Delta_i$ eine lange Wurzel. Dann ist $k\tilde{x}_\alpha \in \varphi(X^i) \cap X$, und damit liegt die ganze L_i-Bahn $\varphi_i(X^i)$ in $X \cap \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{l}}')$.

„$\subseteq$“: Sei $k\tilde{x} \in X \cap \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{l}}')$. Dann gilt $[y_h, \tilde{x}] = 0$. Es gilt also $y_h \in \operatorname{Lie} G_{k\tilde{x}}$, und da der Stabilisator $G_{k\tilde{x}}$ glatt ist, gibt es einen maximalen Torus T von G mit $T \subset G_{k\tilde{x}}$ und $y_h \in \operatorname{Lie} T$. Also: $T \subseteq L$ und $\tilde{x} \in \tilde{\mathbf{g}}_\alpha$ für eine Wurzel α. Diese Wurzel ist wegen $k\tilde{x} \in X$ lang.

Sei nun $i \in I_0$ fest. Weiter sei y_i die Komponente von y_n in $\mathbf{l}_i'$. Wir fassen dabei y_i auch als Element von $\mathbf{l}_i$ auf und betrachten den Hyperebenenschnitt $X^i_{y_i}$.

Lemma 4.3. *Sei $k\bar{x} \in X^i$ und $k\tilde{x} := \varphi_i(k\bar{x})$. Dann ist die Singularität von $X^i_{y_i}$ in $k\bar{x}$ äquivalent zur Singularität von X_y in $k\tilde{x}$.*

Bemerkung: Zwei Hyperflächensingularitäten gegeben durch Funktionen $f(x_1,\ldots,x_m)$ bzw. $g(y_1,\ldots,y_n)$ mit $m \geq n$ heißen äquivalent, wenn es eine nichtausgeartete quadratische Form $q(z_1,\ldots,z_{m-n})$ gibt, so daß die Singularitäten gegeben durch f und $g+q$ zueinander isomorph sind. Für $\operatorname{char} k = 2$ gilt dann $m \equiv n(2)$.

Beweis: Durch Konjugation können wir $\tilde{x} = \tilde{x}_0$ annehmen. Insbesondere ist dann $\alpha_0 \in \Delta_i$. Sei wieder $\Delta_0 := \{\alpha \in \Delta \mid \langle\alpha|\alpha_0\rangle > 0\}$, das wir folgendermaßen zerlegen:

$$\Sigma_1 := \{\alpha \in \Delta_0 \mid \alpha(y_h) = 0\} = \Delta_0 \cap \Delta(y_h),$$
$$\Sigma_2 := \{\alpha \in \Delta_0 \mid \alpha(y_h) \neq 0\} = \Delta_0 \setminus \Delta(y_h).$$

Σ_1 ist dann das „Δ_0“ von L_i. Weiterhin sei U_α wieder die eindimensionale unipotente Untergruppe von G, die zur Wurzel α gehört. Entsprechend der obigen Zerlegung setzen wir nun für j =1,2: $U_j = \prod_{\alpha\in\Sigma_j} U_\alpha \subseteq G$. Während U_2 lediglich ein affiner Raum ist, ist U_1 eine Untergruppe von L'_i, die isomorph auf die U entsprechende Untergruppe von L_i abgebildet wird. Also wird die Singularität von $X^i_{y_i}$ in $k\bar{x}$ durch die Funktion

$$f_1(u) := \langle y_i, u\tilde{x}\rangle \quad (u \in U_1)$$

beschrieben, während die von X in $k\tilde{x}$ durch f gegeben ist:

$$f(u_1,u_2) := \langle y, u_1u_2\tilde{x}\rangle \quad (u_j \in U_j)$$

Der Einfachheit halber setzen wir ab jetzt $i = 1$. Es gilt:

A) $f(u_1,1) = \langle y, u_1\tilde{x}\rangle = \langle y_1, u_1\tilde{x}\rangle + \langle u_1^{-1}y_h, \tilde{x}\rangle + \sum_{j>1}\langle u_1^{-1}y_j, \tilde{x}\rangle$. Nun ist $u_1^{-1}y_h = y_h \in \mathbf{g}_0$ und steht damit auf $\tilde{x}$ senkrecht. Wegen $u_1^{-1}y_j = y_j \in \mathbf{l}'_j$ für $j > 1$ verschwinden auch die letzten Summanden, und wir erhalten
$$f(u_1,1) = f_1(u_1) \quad \text{für alle } u_1 \in U_1.$$

B) *Für alle $u_1 \in U_1$ verschwindet f quadratisch in $u_2 = 1$.*
Sei $x^* \in \mathbf{g}_\beta$ mit $\beta \in \Sigma_2$. Dann ist $[y_h, x^*] = \beta(y_h)x^* \neq 0$. Also ist die Ableitung von f in x^*-Richtung an der Stelle $(u_1,1)$ gleich $\langle y, u_1[x^*,\tilde{x}]\rangle = \beta(y_h)^{-1}\langle y, u_1[[y_h,x^*],\tilde{x}]\rangle = \beta(y_h)^{-1}\langle y, [y_h, u_1[x^*,\tilde{x}]]\rangle = 0$.

C) $f_2(u_2) := f(1,u_2)$ *ist eine Morsefunktion, d.h. die ersten Ableitungen von f_2 verschwinden in 1, und die Matrix der zweiten Ableitungen ist invertierbar.*
Weil y_n nilpotent ist, gibt es in L eine Einparametergruppe $\mu(t)$ mit $\lim_{t\to 0}\mu(t)y = y_h$. Da eine Morsefunktion „Morse“ bleibt, wenn man sie etwas stört, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $y_n = 0$ ist. Dann ist $f_2(u_2) = \langle y_h, u_2\tilde{x}\rangle$. Seien nun $\alpha, \beta \in \Sigma_2$.
   a) $f_2(U_\alpha) \subseteq \langle y_h, \mathbf{g}_{-\alpha_0} \oplus \mathbf{g}_{-\alpha_0+\alpha} \oplus \cdots\rangle = 0$. Dies bedeutet, daß 1 ein kritischer Punkt von f_2 ist und daß im quadratischen Teil von f_2 nur gemischte Terme vorkommen.
   b) Die zweite partielle Ableitung von f_2 ist $\langle y_h, [x_\alpha, [x_\beta\tilde{x}]]\rangle = \langle [y_h, x_\alpha], [x_\beta, \tilde{x}]\rangle = \pm\alpha(y_h)\langle x_\alpha, \tilde{x}_{-\alpha_0+\beta}\rangle$. Dieser Term ist genau dann ungleich null, wenn $\alpha + \beta = \alpha_0$ ist. Wegen $\alpha \in \Sigma_2 \Leftrightarrow \alpha_0 - \alpha \in \Sigma_2$ folgt die Behauptung.

Wir fassen nun u_1 als Parameter und f als Deformation von f_2 auf. Bekanntlich ist $f_2 + \varepsilon$ eine verselle Deformation der Morsefunktion f_2. Wenn man die Formalisierung von U_j im Punkte 1 mit $\hat{U}_j$ bezeichnet, so heißt das: Es gibt einen Morphismus $\Phi : \hat{U}_1 \times \hat{U}_2 \to \hat{U}_2$ mit

$$\Phi(1,u_2) = u_2 \tag{1}$$

und

$$f(u_1, u_2) = f_2(\Phi(u_1, u_2)) + g(u_1). \tag{2}$$

Wegen B) wissen wir

$$D_{u_2} f(u_1, 1) = 0. \tag{3}$$

Wenn man (2) an der Stelle 1 nach u_2 differenziert, erhält man:

$$0 = D_{u_2} f(u_1, 1) = D_{u_2} f_2(\Phi(u_1, 1)) \circ D_{u_2} \Phi(u_1, 1) \tag{4}$$

Wegen (1) ist $D_{u_2}\Phi(u_1, 1)$ invertierbar, und damit ist $\Phi(u_1, 1)$ ein kritischer Punkt von f_2, d.h. $\Phi(u_1, 1) = 1$. Setzt man dies in (2) ein, so erhält man $g = f_1$. Also ist f äquivalent zu f_1, und das Lemma ist bewiesen.

Zusatz: Für ein $v \in \mathbf{g}$ können wir die infinitesimale Deformation $f_\varepsilon(u_1, u_2) := \langle y + \varepsilon v, u_1 u_2 \tilde{x}\rangle$ mit $\varepsilon^2 = 0$ betrachten. Diese Deformation ist genau dann trivial, wenn $h(u_1, u_2) := \langle v, u_1 u_2 \tilde{x}\rangle$ in dem Ideal liegt, das von f und seinen partiellen Ableitungen erzeugt wird. Aus Gleichung (2) folgt, daß alle Komponenten von $D_{u_2} f_2$ in diesem Ideal liegen. Weil f_2 eine Morsefunktion ist, enthält dieses Ideal auch alle Komponenten von u_2. Sei nun $v = x_\alpha$ mit $\alpha \notin \Delta_1$. Dann ist $h(u_1, 1) = 0$, und damit ist die infinitesimale Deformation in Richtung x_α trivial. Wir erhalten daraus:

Die Deformation von f über $\mathbf{g}$ ist genau dann versell, wenn die Deformation von f_1 über $\mathbf{l}_1'$ versell ist.

Mit dem letzten Lemma ist die Frage nach der Art der Singularitäten von X_y auf nilpotente y zurückgeführt worden. Sei also $y = \sum_{\alpha<0} \lambda_\alpha x_\alpha \in \mathbf{n}^-, \lambda_\alpha \in k$. Setze weiterhin $R := \{y \in \mathbf{n}^- \mid \lambda_{-\alpha_i} \neq 0 \text{ für alle } i\}$ und $S_i := \{y \in \mathbf{n}^- \mid \lambda_{-\alpha_i} = 0\}$. Die Elemente aus R heißen *regulär nilpotent.* Fundamental ist nun folgendes Lemma:

Lemma 4.4. *Die regulär nilpotenten Elemente aus* $\mathbf{g}$ *sind alle zueinander konjugiert.*

Beweis: Nach [17] Lemma 5.8 muß man nur zeigen, daß die Menge der nilpotenten Elemente eine offene Bahn enthält. Dies ist für gute Charakteristik bewiesen in [17] Theorem 5.9b). Für klassische Gruppen und $\operatorname{char} k = 2$ steht dies in [11]. Schließlich für die Ausnahmegruppen in schlechter Charakteristik siehe [12].

Insbesondere sind also alle regulär nilpotenten Elemente zu y_0 konjugiert, das wir im letzten Abschnitt ausführlich untersucht haben.

Wir müssen also noch die Elemente aus S_i behandeln (vgl. [18] 3.10).

Lemma 4.5. *Seien α_i und α_j einfache Wurzeln. Dann gilt $GS_i = GS_j$.*

Beweis: Da das Dynkindiagramm von Δ zusammenhängend ist, können wir annehmen, daß die Wurzeln α_i und α_j nicht aufeinander senkrecht stehen. Sei nun H die Leviuntergruppe von G mit $\operatorname{Lie} H = \mathbf{g}_{-\alpha_i} \oplus \mathbf{g}_0 \oplus \mathbf{g}_{\alpha_i}$, und H' ihre Kommutatoruntergruppe. Wir fassen weiterhin $\lambda_{-\alpha_j}$ als Linearform auf S_i auf. Dann ist S_i ein H'-Modul, und wegen $(\alpha_i|\alpha_j) \neq 0$ ist $\lambda_{-\alpha_j}$ ein Höchstgewichtsvektor in S_i^*. Somit ist $S_i \cap S_j = \ker \lambda_{-\alpha_j}$ invariant unter einer Boreluntergruppe von H', woraus folgt, daß die Menge $H'(S_i \cap S_j)$ abgeschlossen und damit gleich S_i ist, da $\lambda_{-\alpha_j}$ nach Annahme nicht H'-invariant ist. Also läßt sich, wie behauptet, jedes Element aus S_i in ein Element aus S_j konjugieren.

Lemma 4.6. *Sei $y \in S_i$, und H, wie im Beweis von Lemma 4.5. Dann ist $H(k\tilde{x}_0) \subseteq \operatorname{Sing} X_y$.*

Beweis: Sei $g \in H$. Dann gilt: $g(k\tilde{x}) \in \operatorname{Sing} X_y \Leftrightarrow k\tilde{x} \in \operatorname{Sing} X_{g^{-1}y}$. Wegen $g^{-1}y \in \mathbf{n}^-$ gilt $\langle g^{-1}y, \mathbf{g}\tilde{x}_0\rangle \subseteq \langle \mathbf{n}^-, \tilde{\mathbf{b}}^-\rangle = 0$, und es folgt die Behauptung.

Sei nun α_{i_0} eine einfache Wurzel, die auf α_0 *nicht* senkrecht steht. Dann besagt Lemma 4.6, daß X_y für $y \in S_{i_0}$ nichtisolierte Singularitäten besitzt. Nach Lemma 4.5 gilt dies dann auch für beliebige nichtreguläre nilpotente Elemente.

Bezeichnung: Sei Δ ein Wurzelsystem, dessen irreduzible Komponenten $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ homogen seien. Wir sagen, daß die Singularitäten einer Varietät V vom Typ Δ sind, wenn V genau s Singularitäten hat und diese quasihomogen, einfach vom Typ $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ sind.

Wir fassen das Erreichte nun noch einmal zusammen. Zuerst noch eine Definition:

Definition: y heißt *schwach regulär*, wenn $y_i \in \mathbf{l}_i$ regulär nilpotent ist für alle i, für die Δ_i lange Wurzeln enthält.

Für homogene Wurzelsysteme sind Regularität und schwache Regularität dasselbe.

Theorem 4.7. *Sei Δ ein Wurzelsystem mit $c(\Delta) \neq p$.*

a) *Für ein $y \in \mathbf{g}$ sind äquivalent:*
   - *y ist schwach regulär.*
   - *X_y hat höchstens isolierte Singularitäten.*

b) *Sei $y \in \mathbf{g}$ schwach regulär, $y = y_h + y_n$ die Jordanzerlegung von y, und es gelte $y_h \in \mathbf{g}_0$. Sei $\Delta(y_h) := \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(y_h) = 0\}$. Dann sind die Singularitäten von X_y vom Typ $\Delta(y_h)^*$.*

c) *X_y ist genau dann glatt, wenn alle Wurzeln aus $\Delta(y_h)$ kurz sind.*
   Für homogene *Wurzelsysteme ($\mathtt{A}_n$,$\mathtt{D}_n$,$\mathtt{E}_n$) sind also äquivalent:*
   - *y ist regulär halbeinfach.*
   - *X_y ist glatt.*

Im folgenden Korollar bezeichne $\langle\Delta'\rangle$ das von Δ' erzeugte Untergitter des Wurzelgitters $\langle\Delta\rangle$.

Korollar. *Sei Δ ein homogenes Wurzelsystem und Δ' ein $\mathbf{Z}$-abgeschlossenes Unterwurzelsystem, so daß $\langle\Delta\rangle/\langle\Delta'\rangle$ höchstens p-Torsion hat. Weiter sei S eine einfache, quasihomogene Singularität vom Typ Δ. Falls $p = 2$ ist, sei die Dimension von S gerade. Dann läßt sich S in Singularitäten vom Typ Δ' deformieren.*

Beweis: Sei $\Delta' \neq \Delta$. Da Δ' $\mathbf{Z}$-abgeschlossen ist, gilt dann auch $\langle\Delta'\rangle \neq \langle\Delta\rangle$. Mit Induktion und nach Theorem 4.7 genügt es zu zeigen, daß es ein Unterwurzelsystem Δ'' mit $\Delta' \subseteq \Delta'' \subset \Delta$ gibt, so daß $\Delta'' = \Delta(y_h)$ für ein halbeinfaches Element y_h ist. Da $\langle\Delta\rangle/\langle\Delta'\rangle$ höchstens p-Torsion hat, gibt es einen nichttrivialen Homorphismus

$$\varphi : \langle\Delta\rangle \to \langle\Delta\rangle/\langle\Delta'\rangle \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \hookrightarrow k.$$

Wähle nun $y_h \in \mathbf{g}_0$ mit $\alpha_i(y_h) = \varphi(\alpha_i)$. Dies ist möglich, da die einfachen Wurzeln α_i linear unabhängig auf $\mathbf{g}_0$ sind. $\Delta'' := \Delta(y_h)$ leistet dann das Gewünschte.

Um alle Unterwurzelsysteme Δ' wie im Korollar zu bestimmen, kann man folgenden modifizierten Borel-de Siebenthal-Algorithmus ([5]) anwenden:

1. $\operatorname{Rg}\Delta' < \operatorname{Rg}\Delta$: Dann liegt Δ' im Wurzelsystem Δ'' einer Leviunteralgebra. Dessen Dynkindiagramm ist ein Unterdiagramm des Dynkindiagramms von Δ. Ersetze Δ durch Δ''.
2. $\operatorname{Rg}\Delta' = \operatorname{Rg}\Delta$:
   a) $\Delta' = \Delta$: Fertig.
   b) $\Delta' \neq \Delta$: Sei $\alpha_0 = \sum a_i\alpha_i$. Nach [5] liegt dann Δ' für ein i im Unterwurzelsystem Δ'' aufgespannt von $(\Pi \setminus \{\alpha_i\}) \cup \{-\alpha_0\}$, wobei a_i eine Primzahl und damit gleich p ist. Ersetze Δ durch Δ''.

Nach Punkt 2b) erhalten wir folgende „unerwartete" Deformationen:

$$\begin{array}{llcll}
p=2: & \mathtt{D}_n & \to & \mathtt{D}_m+\mathtt{D}_{n-m}; \quad 2\le m\le n/2 & (\text{mit } \mathtt{D}_2=\mathtt{A}_1+\mathtt{A}_1,\ \mathtt{D}_3=\mathtt{A}_3)\\
 & \mathtt{E}_6 & \to & \mathtt{A}_5+\mathtt{A}_1 & \\
 & \mathtt{E}_7 & \to & \mathtt{A}_7 & \\
 & \mathtt{E}_7 & \to & \mathtt{D}_6+\mathtt{A}_1 & \\
 & \mathtt{E}_8 & \to & \mathtt{D}_8 & \\
 & \mathtt{E}_8 & \to & \mathtt{E}_7+\mathtt{A}_1 & \\
p=3: & \mathtt{E}_6 & \to & \mathtt{A}_2+\mathtt{A}_2+\mathtt{A}_2 & \\
 & \mathtt{E}_7 & \to & \mathtt{A}_5+\mathtt{A}_2 & \\
 & \mathtt{E}_8 & \to & \mathtt{A}_8 & \\
 & \mathtt{E}_8 & \to & \mathtt{E}_6+\mathtt{A}_2 & \\
p=5: & \mathtt{E}_8 & \to & \mathtt{A}_4+\mathtt{A}_4 &
\end{array}$$

Die Deformation $\mathtt{E}_8 \to \mathtt{A}_8$ für $p=3$ ist übrigens schon in [1] enthalten. Die dort angegebene Deformation $\mathtt{E}_8 \to \mathtt{A}_7$

$$t^5(x_1-t^2x_2)^2 - x_1(5t^4x_2^2+4tx_2^3) + x_1^3 + 4t^6x_2^3 + 5t^3x_2^4 + x_2^5 = 0$$

ist für $p=3$ eine Deformation $\mathtt{E}_8 \to \mathtt{A}_8$.

Vermutung: Es gilt auch die Umkehrung des Korollars.

§5. Die Deformation in guter Charakteristik

Durch Variation des Punktes y in der Nähe von y_0 erhält man eine Deformation der Singularität von X_{y_0}. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß diese Deformation in guter Charakteristik (siehe §2) versell (siehe [16] 2.3) ist.

Theorem 5.1. *Sei p gut für Δ. Dann ist die Deformation der Singularität von X_{y_0} über $\mathbf{g}$ versell.*

Die Beweisidee ist ähnlich der bei [16] Chap. 8: Wir wählen zunächst in $\mathbf{g}$ eine Scheibe S durch y_0, um den trivialen Teil der Deformation längs der Bahn von y_0 abzuspalten. Auf S sowie auf dem Basisraum D der semiuniversellen Deformation der Singularität gibt es dann eine kanonische k^*-Operation mit positiven Gewichten, und es stellt sich heraus, daß beide Räume zueinander k^*-isomorph sind. Weiterhin gibt es nach Definition von D einen (semi-)kanonischen Morphismus $\Phi : S \to D$, der auch noch k^*-äquivariant gewählt werden kann ([16] 2.5) und der die Deformation über S induziert. Eigentlich ist Φ nur auf der Formalisierung von S in y_0 definiert, d.h. Φ wird durch homogene formale Potenzreihen beschrieben. Nun sind aber, wie wir noch sehen werden, alle Gewichte von S positiv, und damit sind die Potenzreihen in Wirklichkeit Polynome, d.h. Φ ist auf ganz S definiert. Wir werden dann zeigen, daß Φ dominant ist, woraus folgt (Lemma 5.2), daß Φ ein Isomorphismus und damit die Deformation über S und $\mathbf{g}$ versell ist.

Wir untersuchen zunächst D: Da die Singularität quasihomogen ist, gibt es auf D eine k^*-Operation. Die Gewichte, mit denen k^* auf diesem Raum operiert, lassen sich leicht berechnen. Bekanntlich ([16] 2.) erhält man D, indem man im Polynomring ein Vektorraumkomplement zum Ideal $S(f)$, das von f und seinen partiellen Ableitungen erzeugt wird, wählt. Für die einfachen, quasihomogenen Singularitäten aus Theorem 1.6 zeigt eine leichte Rechnung, daß die Monome der folgenden Tabelle eine Basis von D bilden (wir nehmen p gut an):

		Gewichte
$\mathtt{A}_n$:	$1, x, \ldots, x^{n-1}, (x^n \text{ für } p \mid n+1)$	$n+1, n, \ldots, 3, 2, (1)$
$\mathtt{D}_n$:	$1, x, \ldots, x^{n-2}, y$	$2n-2, 2n-4, \ldots, 4, 2, n$
$\mathtt{E}_6$:	$1, x, x^2, y, xy, x^2y$	$12, 9, 6, 8, 5, 2$
$\mathtt{E}_7$:	$1, x, y, x^2, xy, y^2, xy^2$	$18, 14, 12, 10, 8, 6, 2$
$\mathtt{E}_8$:	$1, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y$	$30, 24, 18, 12, 20, 14, 8, 2$

Man beachte, daß diese Monome natürlich unabhängig vom quadratischen Teil q in Theorem 1.6 gewählt werden können. Bei dieser Tabelle haben wir die Normalformen aus der zweiten Spalte der Tabelle in Theorem 1.6 zugrunde gelegt. Den Gesamtgrad von f wurde auf $h := \alpha_0(\varrho) + 1$ (siehe §3) normiert. Wenn also $m_1, \ldots, m_s$ die Monome zu einer Funktion f sind, so ist die allgemeine Deformation der Singularität von $\mathcal{V}(f)$ gegeben durch die Funktion $f + \sum_{i=1}^{s} a_i m_i$. Die a_i sind dabei Koordinatenfunktionen auf D. Es gilt offenbar $\deg a_i = h - \deg m_i$. Die Grade der a_i sind in der Tabelle unter „Gewichte“ angegeben. Eine analoge Tabelle für schlechte Charakteristik findet sich im nächsten Abschnitt.

Das folgende Lemma zeigt, wie man schließen kann, daß Φ ein Isomorphismus ist. Es ist eine leichte Verallgemeinerung von [16] 8.1 Lemma 3.

Lemma 5.2. *Seien S und D zwei isomorphe k^*-Vektorräume mit positiven Gewichten und $\Phi : S \to D$ sei ein dominanter (nicht unbedingt linearer) k^*-Morphismus. Dann ist Φ ein Isomorphismus.*

Bemerkung: In [16] wird vorausgesetzt, daß $\Phi^{-1}(0)$ nulldimensional ist. Daraus folgt aber sofort die Dominanz von Φ.

Beweis: Wähle lineare Koordinaten $x_1, \ldots, x_s$ von S und $y_1, \ldots, y_s$ von D mit $\deg x_1 \leq \cdots \leq \deg x_s$ und $\deg x_i = \deg y_i$. Sei Φ gegeben durch $(x_1, \ldots, x_s) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_s))$. Nach einem linearen Koordinatenwechsel in S und D kann man erreichen, daß die Matrix der Ableitung $D_0\Phi$ Diagonalform hat. Dann gilt für alle i: $f_i = \lambda_i x_i + g_i(x_1, \ldots, x_{i-1})$ mit $\lambda_i \in k$ und g_i homogen vom Grad $\deg x_i$. Wenn alle $\lambda_i \neq 0$ sind, ist Φ offenbar invertierbar. Andererseits, wenn $\lambda_{i_0} = 0$ ist, dann sind $f_1, \ldots, f_{i_0} \in k[x_1, \ldots, x_{i_0-1}]$ algebraisch abhängig und Φ ist nicht dominant.

Als nächstes konstruieren und untersuchen wir S. Dazu nehmen wir zunächst zusätzlich an, daß Δ homogen, d.h. vom Typ $\mathtt{A}_n$, $\mathtt{D}_n$ oder $\mathtt{E}_n$ ist. Weiterhin gelte $p \nmid n+1$, wenn Δ vom Typ $\mathtt{A}_n$ ist.

Wie in §2 sei $\varrho : k^* \to G$ die Einparameteruntergruppe von $T \subset G$ mit $\varrho(t)y_0 = t^{-1}y_0$ für alle t. Wenn wir also k^* folgendermaßen auf $\mathbf{g}$ operieren lassen:

$$t \cdot y = t\varrho(t)y$$

dann wird y_0 ein k^*-Fixpunkt. Wähle ein k^*-stabiles Komplement S_0 zu $\mathbf{g}y_0$ in $\mathbf{g}$. Dann ist $S := y_0 + S_0$ die gesuchte Scheibe. Die Gewichte von S und S_0 sind natürlich dieselben. Sei nun $\pi : \mathbf{g} \to \mathbf{g}/\!/G$ die Quotientenabbildung von $\mathbf{g}$. Dann ist $\pi|_S$ ein Isomorphismus (Lemma 5.2 und Lemma 2.5). Also sind die Gewichte von k^* auf S genau die Grade der erzeugenden Basisinvarianten. Diese sind aber unter den angegebenen Bedingungen (Δ homogen, p sehr gut) genau die Grade aus obiger Tabelle (siehe z.B. [16] 3.12), d.h. S und D sind k^*-isomorph.

Nach [16] 2.5 gibt es einen k^*-äquivarianten Morphismus $\Phi : S \to D$, der die Deformation über S induziert. Dann sitzt über jedem Punkt von $\Phi^{-1}(0)$ eine einfache, quasihomogene Singularität vom Typ

Δ. Diese kommt jedoch nur über nilpotenten Elementen vor (§4), und weil S nur ein einziges nilpotentes Element enthält, besteht $\Phi^{-1}(0)$ nur aus einem Punkt y_0. Nach Lemma 5.2 ist Φ ein Isomorphismus und die Deformation ist versell.

Als nächstes behandeln wir den Fall $\Delta = \mathtt{A}_n$ mit $p \mid n+1$: Für das Wurzelsystem $\mathtt{A}_{n+1}$ ist die Versalität schon bewiesen. Nun kommt aber die Singularität $\mathtt{A}_n$ als Nachbarsingularität in $\mathtt{A}_{n+1}$ vor. Da die Versalität einer Deformation eine offene Bedingung ist, folgt aus dem Zusatz von Lemma 4.3 in §4 die Versalität auch für $\Delta = \mathtt{A}_n$.

Zuletzt sind noch die inhomogenen Wurzelsysteme $\mathtt{B}_n$,$\mathtt{C}_n$, $\mathtt{F}_4$ und $\mathtt{G}_2$ zu behandeln. Wie eben können wir uns durch Übergang zu $\mathtt{B}_{n+1}$ auf den Fall $p \not| n$ für $\Delta = \mathtt{B}_n$ beschränken.

Die Schwierigkeit ist, daß in diesen Fällen S zu groß ist. Sei n_0 die Anzahl der kurzen einfachen Wurzeln. Dann sei $Q \subseteq \mathbf{g}$ die Nullstellenmenge der ersten n_0 erzeugenden Invarianten (geordnet nach ihrem Grad), und $S' := S \cap Q$ die neue Scheibe. Da $\pi(Q)$ ein affiner Raum ist, gilt dies auch für $S' \cong \pi(Q)$. Man rechnet leicht nach, daß S' und D als k^*-Varietäten isomorph sind. Dabei ist zu beachten, das die Funktion f aus §3 in den inhomogenen Fällen nicht mehr den Gesamtgrad h, sondern ein gewisses Vielfaches davon hat. Mit diesem Faktor sind daher auch die Gewichte von D zu multiplizieren.

Es ist also wieder zu zeigen, daß

$$\Phi^{-1}(0) = \{y_0\} \tag{$*$}$$

ist. Sei nun

$$\Omega := \{\, y \in \mathbf{g}_0 \mid \alpha(y) = 0 \text{ für alle einfachen, langen Wurzeln } \alpha\}.$$

Nach der Beschreibung der Nachbarsingularitäten in §4 ist $(*)$ äquivalent zur Gleichung

$$\pi(\Omega) \cap \pi(Q) = \{\pi(0)\},$$

die wiederum äquivalent ist zu

$$\Omega \cap (Q \cap \mathbf{g}_0) = \{0\}. \tag{$**$}$$

Der Nachweis dieser Gleichung gelingt nur durch eine Fallunterscheidung. Sei wieder $\lambda_i^\vee \in \mathbf{g}_0$ mit $\alpha_i(\lambda_j^\vee) = \delta_{ij}$. Außerdem bezeichne P_d eine Invariante vom Grad d. Im folgenden verwenden wir die Notation wie in [6] Planches.

$\mathtt{B}_n$: In diesem Fall wird $\mathbf{g}_0$ von $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ aufgespannt. $\Omega = k\lambda_n^\vee = k\sum_i \varepsilon_i$. Weiterhin ist $Q \cap \mathbf{g}_0$ die Nullstellenmenge einer Invarianten vom Grad 2. Nun gilt aber $P_2(\lambda_n^\vee) = \|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n\|^2 = n \neq 0$ und damit ist $(**)$ bewiesen.

$\mathtt{C}_n$: $\Omega = k\lambda_1^\vee \oplus \cdots \oplus k\lambda_{n-1}^\vee = \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\rangle$. Als erste $n-1$ invariante Polynome kann man nehmen: $P_{2i}(a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n) = \sigma_i(a_1^2, \ldots, a_n^2)$, wobei σ_i das i-te elementarsymmetrische Polynom ist. Damit gilt für $y = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n \in \Omega$:

$$a_n = P_2(y) = \cdots = P_{2n-2}(y) = 0 \Longrightarrow y = 0.$$

$\mathtt{F}_4$: $\Omega = k\lambda_3^\vee \oplus k\lambda_4^\vee$. Sei $P_n(y) := \sum \alpha(y)^n$, wobei über alle positiven langen Wurzeln zu summieren ist. Für n gerade ist P_n invariant. Eine explizite Rechnung zeigt:

$$P_n(a\lambda_3^\vee + b\lambda_4^\vee) = 2^n 3[a^n + (a+b)^n + (2a+b)^n].$$

Dann ist $Q \cap \mathbf{g}_0$ die Nullstellenmenge von P_2 und P_6. Nun sind alle Nullstellen aus Ω von P_2 allein von der Form $y = a(\lambda_3^\vee + (\zeta_3 - 1)\lambda_4^\vee)$ mit $a \in k$ und ζ_3 eine primitive dritte Einheitswurzel. Aus $0 = P_6(y) = 2^6 3^2 a^6$ folgt $y = 0$.

$\mathtt{G}_2$: $\Omega = k\lambda_1^\vee, P_2(\lambda_1^\vee) = \| - \varepsilon_2 + \varepsilon_3\|^2 = 2 \neq 0$.

Damit ist das Theorem vollständig bewiesen.

§6. Die Deformation in schlechter Charakteristik

In diesem Fall behandeln wir die Deformation für homogene Wurzelsysteme in schlechter Charakteristik, d.h.

$\mathtt{D}_n$ und $p = 2$;
$\mathtt{E}_6$ und $p = 2, 3$;
$\mathtt{E}_7$ und $p = 2, 3$;
$\mathtt{E}_8$ und $p = 2, 3, 5$.

Dazu rechnen wir wieder die Gewichte auf dem Basisraum der semi-universellen Deformation aus, wobei wir für $p = 2$ die Normalformen aus der vierten Spalte der Tabelle in Theorem 1.6 zugrunde legen. Wir fassen das Ergebnis in der folgenden Tabelle zusammen:

Δ	char k	$x^i y^j z^k$	positive Gewichte	negative Gewichte	$\dim D^+$
$\mathtt{D}_{2m}$	$p = 2$:	$i \le m-1, j \le 1, k \le 1$	$2m-1, 2m-3, \ldots, 1, 1$	$-1, \ldots, -2m+3$	$3m+1$
$\mathtt{D}_{2m+1}$	$p = 2$:	$i \le m-1, j \le 1, k \le 1$	$2m-1, 2m-3, \ldots, 1$	$-1, \cdots, -2m+3$	$3m+1$
$\mathtt{E}_6$	$p = 2$:	$i \le 1, j \le 1, k \le 1$	3	-1	7
$\mathtt{E}_6$	$p = 3$:	$i \le 2, j \le 2, k = 0$	$4, 1$	-2	8
$\mathtt{E}_7$	$p = 2$:	$2i + j \le 4, j \le 2, k \le 1$	$9, 5, 3, 1$	$-1, -3, -7$	11
$\mathtt{E}_7$	$p = 3$:	$i \le 2, j \le 2, k = 0$	4	-2	8
$\mathtt{E}_8$	$p = 2$:	$i \le 2, j \le 1, k \le 1$	$15, 9, 5, 3$	$-1, -3, -7, -13$	12
$\mathtt{E}_8$	$p = 3$:	$i \le 3, j \le 2, k = 0$	$10, 4$	$-2, -8$	10
$\mathtt{E}_8$	$p = 5$:	$i \le 4, j \le 1, k = 0$	6	-4	9

Dabei stehen unter $x^i y^j z^k$ die Mengen von Monomen, die den Raum D aufspannen, während nur die Gewichte von D aufgeführt sind, die zum klassischen Fall (§5) *hinzu*kommen. Man sieht, daß p genau dann schlecht ist, wenn negative Gewichte auftreten. Dabei ist D^+ die Teilmenge von D auf der alle Funktionen mit negativem Gewicht verschwinden. Analog sei D^- definiert. Wir zerlegen nun auch $\mathbf{g} = \mathbf{b} \oplus \mathbf{n}^-$. Auf dem ersten Summanden operiert k^* mit positiven Gewichten, auf dem zweiten mit nichtpositiven. Sei nun wieder $\Phi : \hat{\mathbf{g}} \to D$ ein k^*-äquivarianter Morphismus, der die Deformation über $\mathbf{g}$ induziert. Das folgende Lemma zeigt, daß die Deformation über $\mathbf{g}$ in schlechter Charakteristik unmöglich versell sein kann. Genauer gilt:

Lemma 6.1. $\Phi(\hat{\mathbf{n}}^-) = 0$.

Beweis: Da die regulär nilpotenten Elemente in $\mathbf{n}^-$ alle zueinander konjugiert sind (Lemma 4.4), sind die Singularitäten über diesen Punkten alle zueinander isomorph. Wegen $\Phi(\hat{\mathbf{n}}^-) \subset D^-$ genügt zu zeigen, daß der Nullpunkt der einzige Punkt aus D^- ist, über dem eine Singularität vom Typ Δ vorliegt. Man rechnet jedoch schnell nach, daß das Ideal $S(f)$, das von der Funktion und ihren partiellen Ableitungen aufgespannt ist, über $D \setminus \{0\}$ eine echt kleinere Kodimension im gesamten Ring hat.

Beispiel $\mathtt{E}_8$, $p=2$: Die allgemeine Deformation über D^- ist

$$F(x,y,z)=x^5+y^3+z^2+z(a_1xy+a_2x^2y+a_3x^3+a_4x^3y).$$

Die in der Tabelle angegebenen Monome spannen immer noch $k[x,y,z]/S(F)$ auf, da dies eine offene Bedingung ist. Auf der anderen Seite liefert $\frac{\partial F}{\partial z}=a_1xy+a_2x^2y+a_3x^3+a_4x^3y$ eine lineare Abhängigkeit zwischen xy,x^2y,x^3 und x^3y. Alle anderen Fälle werden genauso behandelt.

Setze $\mathbf{b}':=y_0+\mathbf{b}$. Da die Gewichte von $\mathbf{b}'$ positiv sind, läßt sich Φ auf $\mathbf{b}'$ fortsetzen und es gilt $\Phi(\mathbf{b}')\subseteq D^+$.

Theorem 6.2. *Sei Δ ein homogenes Wurzelsystem. Dann ist die Deformation über $\mathbf{b}'$ äquivalent zur Deformation über D^+, d.h. $\Phi|_{\mathbf{b}'}:\mathbf{b}'\to D^+$ ist glatt in y_0.*

Bemerkung: Ich vermute sogar $\Phi(\hat{\mathbf{g}})\subset D^+$. Wenn dies richtig wäre, dann könnte man $\mathbf{b}'$ in Theorem 6.2 durch $\mathbf{g}$ ersetzen.

Beweis: Für gute Charakteristik ist $D^+=D$. Daher folgt dieses Theorem aus Theorem 5.1. Sei die Charakteristik also schlecht.

Wir konstruieren wieder einen affinen Teilraum S von $\mathbf{b}'$, so daß $\Phi|_S:S\to D^+$ ein Isomorphismus ist. k^* operiere wieder wie in Abschnitt 5 auf $\mathbf{g}$. Sei diesmal S_0 ein k^*-stabiles Komplement zu $\mathbf{g}y_0\cap\mathbf{b}=\mathbf{n}y_0$ in $\mathbf{b}$ und $S:=y_0+S_0$. Um die Gewichte auf S_0 zu bestimmen, betrachten wir folgende exakten Sequenzen:

$$0\longrightarrow\mathbf{n}y_0\longrightarrow\mathbf{b}\longrightarrow S_0\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow\mathbf{n}_{y_0}\longrightarrow\mathbf{n}\xrightarrow{[1]}\mathbf{n}y_0\longrightarrow 0$$

Dabei sind alle Homomorphismen k^*-äquivariant bis auf denjenigen, der mit [1] gekennzeichnet ist. Dieser verschiebt die Gewichte um 1. Für einen beliebigen k^*-Modul V sei $\chi_V(t)$ das Laurentpolynom, dessen i-ter Koeffizient ($i\in\mathbf{Z}$) die Multiplizität des Gewichts i in V ist. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}\chi_{S_0}&=\chi_{\mathbf{b}}-\chi_{\mathbf{n}y_0}=\chi_{\mathbf{b}}-t^{-1}(\chi_{\mathbf{n}}-\chi_{\mathbf{n}_{y_0}})=\\&=(\chi_{\mathbf{b}}-t^{-1}\chi_{\mathbf{n}})+t^{-1}\chi_{\mathbf{n}_{y_0}}.\end{aligned}$$

In guter Charakteristik verschwindet der letzte Summand, d.h. der erste Summand beschreibt genau die Gewichte, wie sie im vorhergehenden Abschnitt aufgeführt worden sind. (Dies ist übrigens eine Möglichkeit die Grade der erzeugenden Invarianten auszurechnen.) Wir müssen also zeigen, daß die Gewichte von $\mathbf{n}_{y_0}$ genau die positiven Zahlen aus obiger Tabelle sind.

Sei $\mathbf{g}_i$ der Gewichtsraum von $\mathbf{g}$ unter ϱ und $\mu_i:\mathbf{g}_i\to\mathbf{g}_{i-1}:y\mapsto[y_0,y]$ die Multiplikation mit y_0. Dann ist $t^{-1}\chi_{\mathbf{n}_{y_0}}(t)=\sum_{i\geq 1}m_it^i$ mit $m_i:=\dim\ker\mu_i$. Die Zahlen m_i sind in [17] aufgelistet, und zwar für $i=1$ in Cor.2.5 (Fall $\Delta=\Gamma'$) und für $i\geq 2$ in Thm.2.6. Man muß dort allerdings i durch $-i$ ersetzen. Es stellt sich dann heraus:

Lemma 6.3. *D^+ und S sind isomorph als k^*-Varietäten.*

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß der Morphismus $\Phi:S\to D^+$ dominant ist. Dies ist jedoch nicht so einfach wie in guter Charakteristik, da als Faser $\Phi^{-1}(0)$ der ganze Schnitt von S mit der Bahn Gy_0 in Frage kommt, der eben nicht nur aus einem Punkt besteht.

Die Dominanz von Φ folgt aus folgendem Lemma:

Lemma 6.4. *Es gibt einen Punkt $y' \in S$, in dem die Ableitung $D_{y'}\Phi$ surjektiv ist.*

Beweis: Um genau zu sein, beweisen wir dieses Lemma und Theorem 6.2 gleichzeitig durch Induktion nach $\dim G$. Wir wählen $y' \in S$ so, daß y' regulär ist und der halbeinfache Teil y'_h zu einem Vielfachen von $\bar{y}$ aus folgender Tabelle konjugiert ist: (Dies ist möglich, da $T_{y_0}(Gy_0)$ und S den ganzen Tangentialraum von $\mathbf{g}$ in y_0 aufspannen.)

	$\bar{y}$	$C_G(\bar{y})$	$\dim D_1^+$
$\mathtt{D}_n,\ p = 2$:	$\lambda_2^\vee$	$\mathtt{D}_{n-2} + \mathtt{A}_1 + \mathtt{A}_1$	$3\lfloor n/2 \rfloor + 2$
$\mathtt{E}_6,\ p = 2$:	$\lambda_2^\vee$	$\mathtt{A}_5 + \mathtt{A}_1$	8
$p = 3$:	$\lambda_4^\vee$	$\mathtt{A}_2 + \mathtt{A}_2 + \mathtt{A}_2$	9
$\mathtt{E}_7,\ p = 2$:	$\lambda_1^\vee$	$\mathtt{D}_6 + \mathtt{A}_1$	12
$p = 3$:	$\lambda_3^\vee$	$\mathtt{A}_5 + \mathtt{A}_2$	9
$\mathtt{E}_8,\ p = 2$:	$\lambda_8^\vee$	$\mathtt{E}_7 + \mathtt{A}_1$	13
$p = 3$:	$\lambda_7^\vee$	$\mathtt{E}_6 + \mathtt{A}_2$	11
$p = 5$:	$\lambda_5^\vee$	$\mathtt{A}_4 + \mathtt{A}_4$	10

Die dritte Spalte enthält den Typ des Zentralisators von $\bar{y}$ und damit auch den Typ der Singularitäten von $X_{y'}$. Das Wurzelsystem von $C_G(\bar{y})$ besteht dabei aus allen Wurzeln α mit $\alpha(\bar{y}) = 0$. Wenn also $\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$ und $\bar{y} = \lambda_{i_0}^\vee$ ist, dann gehört α genau dann zu diesem Wurzelsystem, wenn $n_{i_0} \equiv 0(p)$ ist. In unseren Fällen wird es von $\{\alpha_i \mid i \neq i_0\} \cup \{-\alpha_0\}$ erzeugt.

Die vierte Spalte enthält die Dimension des positiven Teils D_1^+ der versellen Deformation der Singularitäten von $X_{y'}$. Zum Beispiel ist die verselle Deformation einer $\mathtt{A}_4$-Singularität mit $\operatorname{char} k = 5$ fünfdimensional, und damit ergibt sich die Dimension in der letzten Zeile als $5 + 5 = 10$.

Ein Vergleich mit der vorletzten Tabelle liefert:

$$\dim D_1^+ = \dim D^+ + 1.$$

Sei nun G_1 die adjungierte Form von $C_G(y'_h)$. Dann bekommen wir wieder einen kanonischen Morphismus $\Phi_1 : \hat{\mathbf{g}}_1 \to D_1$. Nach Induktion ist der Rang der Tangentialabbildung von Φ_1 in y' mindestens $\dim D_1^+$. Eigentlich haben wir das nur für einfache Gruppen bewiesen, aber die Behauptung überträgt sich sofort auf direkte Produkte. Weiterhin besteht das Zentrum von $\operatorname{Lie} C_G(y'_h)$ genau aus ky'_h, d.h. die Sequenz

$$0 \longrightarrow ky'_h \longrightarrow \operatorname{Lie} C_G(y'_h) \longrightarrow \operatorname{Lie} G_1$$

ist exakt. Sei nun $\hat{\mathbf{g}}_{y'}$ die Formalisierung von $\mathbf{g}$ in y'. Aus der Deformation der Singularitäten von $X_{y'}$ erhalten wir einen Morphismus $\Phi' : \hat{\mathbf{g}}_{y'} \to D_1$. Wie im Zusatz von Lemma 4.3 können wir

$$\operatorname{Rg} D_{y'}\Phi' \geq \dim D_1^+ - 1 = \dim D^+$$

schließen. Sei $\mathbf{b}_1$ eine Borelunteralgebra, die y' enthält, und $\mathbf{n}_1$ ihr Nilradikal. Dann wissen wir (Lemma 6.1), daß die infinitesimale Deformation der Singularität von $X_{y'}$ in Richtung $\mathbf{n}_1$ trivial ist. Dies gilt auch für $\mathbf{g}y'$. Nun gilt nach Konstruktion $S_0 + \mathbf{g}y_0 + \mathbf{n}^- = \mathbf{g}$. Wenn wir also y' „nahe genug“ bei y_0 wählen, erhalten wir $S_0 + \mathbf{g}y' + \mathbf{n}_1 = \mathbf{g}$. Also hat die Einschränkung von $D_{y'}\Phi'$ auf S den Rang $\dim D^+$. Wegen der Semiuniversalität der Deformation über D_1 gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\Psi : T_{\Phi(y')}(D) \to$

$T_{\Phi'(y')}(D_1)$ mit $D_{y'}\Phi'|_S = \Psi \circ D_{y'}\Phi|_S$. Damit ist der Rang von $D_{y'}\Phi|_S$ auch mindestens $\dim D^+$, was zu beweisen war.

Sei $\mathcal{T}$ die abgeschlossene Teilmenge von D, über der eine Singularität vom Typ Δ sitzt. Für sehr gute Charakteristik gilt $\mathcal{T} = \{0\}$. Im Beweis von Lemma 6.1 haben wir gesehen, daß keine Singularität über $\Delta^- \setminus \{0\}$ aus $\mathcal{T}$ ist. Damit gilt $\mathcal{T} \subset D^+$. Wenn man nun D^+ mit S identifiziert, so gilt $\mathcal{T} = S \cap Gy_0$. Aus $\dim Gy_0 = \dim \mathbf{g} - \operatorname{Rg}\Delta$ folgt

Korollar. $\dim D = \operatorname{Rg}\Delta + \dim \mathcal{T} + \dim D^-$.

Diese Formel wurde von Slodowy durch direktes Nachrechnen gefunden (unveröffentlicht). Sie verallgemeinert die Formel $\dim D = \operatorname{Rg}\Delta$ für sehr gute Charakteristik.

Korollar. *Alle Singularitäten über D^+ sind quasihomogen.*

Bemerkung: Sei $\Delta' \subseteq \Delta$ ein Unterwurzelsystem von Δ, so daß $\langle\Delta\rangle/\langle\Delta'\rangle$ höchstens p-Torsion hat. Dann läßt sich nach dem Korollar zu Theorem 4.7 eine Singularität vom Typ Δ in eine vom Typ Δ' deformieren, d.h. die Singularität vom Typ Δ' kommt über gewissen Punkten von D vor. Allerdings braucht keiner dieser Punkte in D^+ zu liegen. Dies wäre äquivalent dazu, daß Δ' das Wurzelsystem des Zentralisators eines Punktes y_h aus $\mathbf{g}_0$ ist. Betrachten wir zum Beispiel die Deformation $\mathtt{E}_8 \to \mathtt{A}_7$ mit $\operatorname{char} k = 3$. Das Wurzelsystem $\mathtt{A}_7$ kommt in $\mathtt{E}_8$ bis auf Konjugation mit der Weylgruppe nur auf eine einzige Art vor, so daß $\langle\Delta\rangle/\langle\Delta'\rangle$ höchstens 3-Torsion hat, und zwar erzeugt von $\Pi \setminus \{\alpha_2\}$. Damit wäre y_h ein Vielfaches von $\lambda_2^\vee$. Wegen $\alpha_0(\lambda_2^\vee) = 3$ enthält das Wurzelsystem von $C_G(y_h)$ noch zusätzlich α_0, und ist damit isomorph zu $\mathtt{A}_8$. Da die im §4 angegebene Deformation ganz in D^+ liegt (mit $\deg t = 2$), sehen wir a priori, daß sie für $\operatorname{char} k = 3$ eine Deformation $\mathtt{E}_8 \to \mathtt{A}_8$ sein muß.

Literatur:

[1] V. I. Arnol'd: *Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities.* Functional Anal. Appl. **6** (1972), 254–272.

[2] M. Artin: *Coverings of the rational double points in characteristic p.* in: Complex Analysis and Algebraic Geometry, ed. W. L. Baily, jr. and T. Shioda, Iwanami Shoten, Publ., Cambridge Univ. Press (1977).

[3] P. Bardsley, R. W. Richardson: *Étale slices for algebraic transformation groups in characteristic p.* Proc. London Math. Soc. **51** (1985), 295–317.

[4] A. Borel et al.: *Seminar on algebraic groups and related finite groups.* LN in Math. **131**, Springer: Berlin-Heidelberg-New York(1970).

[5] A. Borel, J. de Siebenthal: *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos.* Comm. Math. Helv. **23** (1949), 200–221.

[6] N. Bourbaki: Groupes et algébres des Lie. Chap. 4, 5, 6: *Masson: Paris* (1981); Chap. 7, 8: *Diffusion C.C.L.S.: Paris* (1975)

[7] E. Brieskorn: *Singular elements of semisimple algebraic groups.* in: Actes Congrès Intern. Math. **2** (1970), 279–284.

[8] J. Dieudonné: La géométrie des groupes classiques, 2. ed. *Springer: Berlin, Göttingen, Heidelberg* (1963)

[9] A. H. Durfee: *Fifteen characterisations of rational double points and simple critical points.* Eins. Math., II. Ser. **25** (1979), 132–163.

[10] E. B. Dynkin: *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras.* A. M. S. Transl. Ser.2 **6** (1957), 111–245.

[11] W. H. Hesselink: *Nilpotency in classical groups over a field of characteristic 2.* Math. Z. **166** (1979), 165–181.

[12] D. F. Holt, N. Spaltenstein: *Nilpotent orbits of ecxeptional Lie algebras over algebraically closed fields of bad characteristic.* J. Austral. Math. Soc. **38** (1985), 330–350.

[13] K. Jacobs: Einführung in die Kombinatorik. *de Gruyter: Berlin* (1983)

[14] G. Kempf: *Linear systems on homogeneous spaces.* Ann. Math. **103** (1976), 557–591.

[15] K. Saito: *Einfach-elliptische Singularitäten.* Inv. math. **23** (1974), 289–325.

[16] P. Slodowy: *Simple singularities and simple algebraic groups.* LN in Math. **815**, Springer: Berlin-Heidelberg-New York (1980).

[17] T. A. Springer: *Some arithmetical results on semi-simple Lie algebras.* Publ. math. IHES **30** (1966), 115–142.

[18] R. Steinberg: *Conjugacy classes in algebraic groups.* LN in Math. **366**, Springer: Berlin-Heidelberg-New York (1974).