Version 2.00

Über Bewertungen, welche unter einer reduktiven Gruppe invariant sind

Friedrich Knop*
Mathematisches Institut der Universität Basel, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel
knop@urz.unibas.ch

Summary: Let G be a reductive group defined over an algebraically closed field k and let X be a G-variety. In this paper we study G-invariant valuations v of the field K of rational functions on X. These objects are fundamental for the theory of equivariant completions of X. Let B be a Borel subgroup and U the unipotent radical of B. It is proved that v is uniquely determined by its restriction to K^U. Then we study the set of invariant valuations having some fixed restriction v_0 to K^B. If v_0 is geometric (i.e., induced by a prime divisor) then this set is a polyhedron in some vector space. In characteristic zero we prove that this polyhedron is a simplicial cone and in fact the fundamental domain of finite reflection group W_X. Thus, the classification of invariant valuations is almost reduced to the classification of valuations of K^B.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und K eine endlich erzeugte Körpererweiterung. Ein grundlegendes Problem der algebraischen Geometrie ist es, alle Varietäten X zu finden, deren Funktionenkörper $k(X)$ gleich K ist. Sei c der Transzendenzgrad von K über k. Dann ist das Problem trivial für $c = 0$ und die Lösung ist klassisch für $c = 1$: Es gibt bis auf Isomorphie genau eine projektive, normale Kurve X mit $k(X) = K$. Die Konstruktion von X aus K geschieht durch Bewertungen: X ist als Punktmenge gleich der Menge der diskreten normierten Bewertungen von K/k (siehe [Ha] I.6). Für $c > 1$ gibt es einige tiefliegende Resultate in dieser Richtung (z.B. die Existenz eines minimalen Modells), aber gerade für rationale Körper ist das Problem schon für $c = 2$ (Klassifikation rationaler Flächen) kombinatorisch sehr kompliziert. Aber die Theorie der Bewertungen

* Unterstützt durch den Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

spielt auch hier eine wichtige Rolle, so zum Beispiel bei der Auflösung von Singularitäten.

Seit einiger Zeit betrachtet man auch das äquivariante Analogon dieser Problemstellung: Eine zusammenhängende algebraische Gruppe operiere auf K und man sucht alle (normalen) G-Varietäten X mit $k(X) = K$. Der wichtigste Spezialfall ist der, daß man von einer homogenen G-Varietät G/H ausgeht. Mit $K = k(G/H)$ lautet die Aufgabe nun: Klassifiziere alle G-äquivarianten, offenen Einbettungen $G/H \hookrightarrow X$. In dieser Form ist das Problem zuerst für symmetrische Räume (z.B. Satake [Sa], DeConcini-Procesi [CP]) und für Tori (Demazure [De], Mumford et al. [KKMS], Oda [MO]) behandelt worden.

Ein allgemeiner Ansatz für das Einbettungsproblem wurde dann von Luna und Vust [LV] geliefert. Die Idee besteht wieder darin, Einbettungen mit Hilfe von diesmal G-invarianten Bewertungen zu beschreiben. Dies funktioniert am besten für *reduktive* Gruppen. Daher werde ich ab jetzt G als reduktiv annehmen. Die Hauptbeobachtung von Luna und Vust ist nun: Sei X eine normale G-Varietät und $Y \subseteq X$ eine G-stabile Untervarietät. Dann wird der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,Y}$ und damit eine offene Umgebung von Y in X durch folgende zwei Mengen beschrieben (siehe Satz 3.8):

a) Die Menge $\mathcal{A}$ aller (geometrischen) G-invarianten Bewertungen, die $\mathcal{O}_{X,Y}$ dominieren.
b) Die Menge $\mathcal{B}$ aller B-stabilen, aber nicht G-stabilen Primdivisoren $D \subseteq X$, die Y enthalten.

Dabei ist B eine Boreluntergruppe von G. Somit gliedert sich die Klassifikation der (Keime von) Einbettungen in drei Teile:

I) Die Bestimmung aller G-invarianten Bewertungen.
II) Die Bestimmung aller B-invarianten Primdivisoren.
III) Die Bestimmung aller „zulässigen“ Paare $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Für III) haben Luna-Vust eine Reihe hinreichender und notwendiger, wenn auch sehr komplizierter Bedingungen aufgestellt. Bei II) ist es klar, daß man die Operation von B auf X untersuchen muß. Die wichtigste Größe ist hier der Transzendenzgrad $c(X)$ des Körpers K^B der B-invarianten rationalen Funktionen. Dieser ist gleich der minimalen Kodimension einer B-Bahn in X. Die Zahl $c(X)$ wird nach Luna und Vust die *Kompliziertheit* von X genannt. Am einfachsten sind natürlich Varietäten mit $c(X) = 0$, d.h. mit einer offenen B-Bahn. Diese heißen *sphärisch.* In diesem Fall gibt es nur endlich viele B-stabile Primdivisoren, nämlich die Komponenten des Komplements der offenen Bahn.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Problem I), d.h., sie enthält ein systematisches Studium der unter einer reduktiven Gruppe invarianten Bewertungen eines Funktionenkörpers. Nicht so naheliegend ist dabei, daß auch hier die Operation von B auf K die entscheidende Rolle spielt.

Sei U die Kommutatoruntergruppe von B. Dann zeigen wir zuerst, daß eine G-invariante Bewertung v schon eindeutig durch ihre Einschränkung v^U auf den Körper K^U der U-Invarianten bestimmt ist. Weiterhin zeigen wir, wie sich die wichtigsten Eigenschaften und numerischen Größen von v (Dimension, Rang usw.) aus v^U ablesen lassen (Abschnitt 3).

Als nächstes untersuchen wir T-invariante Bewertungen von K^U, oder etwas allgemeiner homogene Bewertungen einer graduierten Algebra (Abschnitt 4). Sei v^B die Einschränkung von v auf K^B. Es zeigt sich, daß die Menge der homogenen Bewertungen v^U von K^U mit vorgegebenem v^B einen affinen Raum unter einer gewissen kommutativen Gruppe bildet.

In Abschnitt 5 stellen wir ein Kriterium auf, das die G-invarianten Bewertungen unter den homogenen Bewertungen von K^U charakterisiert. Als Korollar erhalten wir die Konvexität dieser Menge in den oben genannten affinen Räumen. Die Ergebnisse bis hierhin zeigen, daß eine Klassifikation der invarianten Bewertungen von K nur gelingen kann, wenn man alle Bewertungen von K^B kennt. Dies ist aber, wie am Anfang erklärt, nur dann der Fall, wenn der Transzendenzgrad von K^B, d.h. die Kompliziertheit von K, nicht zu groß, d.h. ≤ 1 ist. Aber schon der sphärische Fall $K^B = k$ ist nicht ganz trivial.

In den nächsten Abschnitten betrachten wir vorwiegend Bewertungen, für die v^B geometrisch ist, d.h. v^B wird von einem Primdivisor in einem normalen Modell von K^B induziert. In Abschnitt 6 zeigen wir dann, daß die Menge der invarianten Bewertungen mit vorgegebenem geometrischem v^B ein abgeschlossenes Polytop bilden.

In Abschnitt 7 werden Vergleichssätze aufgestellt, die die Menge der invarianten Bewertungen von K mit der des Restklassenkörpers k_v einer invarianten Bewertung v verknüpfen. Diese Ergebnisse dienen vor allem als Grundlage für einen Induktionsbeweis im letzten Abschnitt.

Invariante Bewertungen v, deren Einschränkung auf K^B trivial sind, heißen *zentral*. Als Faser der Abbildung $v \mapsto v^B$ bildet die Menge $\mathcal{Z}$ der zentralen $\mathbb{Q}$-wertigen Bewertungen einen endlich erzeugten konvexen Kegel in einem gewissen $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathcal{H}$. In Abschnitt 8 bestimmen wir den größten linearen Teilraum, der in $\mathcal{Z}$ enthalten ist, und beantworten damit die Frage, wann $\mathcal{Z}$ spitz, d.h. streng konvex ist. Die Antwort wird gegeben durch eine gewisse Untergruppe der G-Automorphismengruppe von X.

Schließlich verallgemeinern wir ein fundamentales Resultat von Brion [Br] für sphärische auf beliebige G-Varietäten. Dieses besagt, daß $\mathcal{Z}$ immer der Fundamentalbereich einer endlichen Spiegelungsgruppe W_X ist (Abschnitt 9). Leider müssen wir dazu $\operatorname{char} k = 0$ voraussetzen. In [Kn1] habe ich bereits mit Hilfe der Momentabbildung jeder G-Varietät eine Spiegelungsgruppe zugeordnet. In einer weiteren Arbeit [Kn3] werde ich zeigen, daß beide Konstruktionen zur gleichen Gruppe führen. Dies liefert auch einen neuen Beweis für den Satz von Brion.

Die Ideen für viele Sätze und Beweise dieser Arbeit gehen auf [LV] zurück, oder verallgemeinern Sachverhalte für sphärische Varietäten aus [Pau], [BP] und [BLV]. Da ich versucht habe, möglichst viele Resultate für Körper beliebiger Charakteristik zu beweisen, wurden zum Teil erhebliche Änderungen notwendig. Grundlegend ist hierbei der Beweis des lokalen Struktursatzes in beliebiger Charakteristik (Abschnitt 1), und Folgerungen aus dem Theorem von Haboush über die geometrische Reduktivität reduktiver Gruppen (Abschnitt 2).

Weiterhin habe ich versucht alle Sätze für beliebige G-Varietäten und nicht nur für homogene Räume zu formulieren. Dies zahlt sich manchmal in Induktionsbeweisen aus.

Schließlich verwendete ich viel Sorgfalt, um möglichst allgemeine Bewertungen zuzulassen. Insbesondere brauchen die Bewertungen nicht diskret oder gar geometrisch zu sein. Außer der erhöhten Allgemeinheit hat dies zwei Vorteile: Selbst wenn man nur an z.B. diskreten Bewertungen interessiert ist, kann es Konstruktionen (z.B. mit Zornschem Lemma) geben, die a priori auf nichtdiskrete Bewertungen führen.

Der zweite Grund ist der, daß damit ein neuer Beweis für die Vergleichssätze in Abschnitt 7 möglich wurde. Seien nämlich Λ' und Λ'' zwei geordnete abelsche Gruppen und sei $\Lambda := \Lambda' \oplus \Lambda''$ versehen mit der lexikographischen Ordnung. Dann ist eine Λ-Bewertung *im wesentlichen* ein Paar (v', v''), wobei v' eine Λ'-Bewertung von K und v'' eine Λ''-Bewertung des Restklassenkörpers von v' ist. Für eine exakte Formulierung siehe Abschnitt 7.

Danksagung: Ich möchte dem Referenten für einige Verbesserungsvorschläge danken.

Bezeichnungen: Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert. Sein charakteristischer Exponent sei p, d.h. $p = 1$ falls $\operatorname{char} k = 0$ und $p = \operatorname{char} k$ sonst. Mit $R^\times$ bezeichnen wir die Einheitengruppe eines Ringes R. Insbesondere ist $k^\times = k \setminus \{0\}$.

In der ganzen Arbeit seien G eine zusammenhängende reduktive Gruppe, $B \subseteq G$ eine Boreluntergruppe, $U \subseteq B$ die maximale unipotente Untergruppe, $T \subseteq B$ ein maximaler Torus und B^- diejenige Boreluntergruppe mit $B \cap B^- = T$. Die positiven Wurzeln seien die Gewichte von T in $\operatorname{Lie} U$.

Für eine beliebige algebraische Gruppe H und einen H-Modul V sei $V^{(H)} := \{v \in V \mid v \neq 0, Hv \subseteq k^\times v\}$ die Menge der H-Eigenvektoren in V. Für $v \in V^{(H)}$ sei χ_v der zugehörige Charakter von H. Das unipotente Radikal von H bezeichnen wir mit H_u. Schließlich sei $\langle v \rangle$ die Gerade kv durch einen Vektor v.

Die folgenden Tabelle dient nur zum Nachschlagen. Alle Bezeichnungen werden im

Text eingeführt.

§0:	k	Alg. abg. Körper
	p	Char. Exp. von k
	$R^\times$	Einheiten von R
	G	Zus.h. red. Gruppe
	B	Boreluntergruppe von G
	U	$= B_u$
	T	Max. Torus von B
	B^-	Gegenüberl. Borelug.
	$V^{(H)}$	Eigenvektoren
	χ_v	Eigencharakter
	H_u	Unip. Radikal
	$\langle v\rangle$	$= kv \in \mathbf{P}(V)$
§1:	X	G-Varietät
	X_σ	$= \{x \in X \mid \sigma(x) \neq 0\}$
§2:	$P(X)$	
	$P_u(X)$	$= P(X)_u$
	$S(X)$	
	$A(X)$	$= P(X)/S(X)$
	$d_H(X)$	$= \mathrm{Tr.grad}\, k(X)^H/k$
	$c(X)$	$= d_B(X)$
	$\mathrm{rg}\, X$	$= d_U(X) - d_B(X)$
§3:	Λ	Angeordnete ab. Gruppe
	v	Λ-Bewertung von K
	$\mathcal{O}_v$	$= \{f \in K \mid v(f) \geq 0\}$
	$\mathfrak{m}_v$	$= \{f \in K \mid v(f) > 0\}$
	k_v	$= \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$
	$\Lambda(v)$	$= v(K^\times) \subseteq \Lambda$
	$\mathcal{V}_\Lambda(K)$	Menge aller Λ-Bewert.
	o	Triviale Bewertung
	$\dim v$	$= \mathrm{Tr.grad}\, k_v/k$
	$\mathrm{kodim}\, v$	$= \dim X - \dim v$
	$\mathrm{rg}\, v$	$= \mathrm{Krulldim}\, \mathcal{O}_v$
	$\mathrm{rg}_\mathbb{Q}\, v$	$= \dim_\mathbb{Q} \Lambda(v) \otimes \mathbb{Q}$
	$\mathrm{def}\, v$	$= \mathrm{kodim}\, v - \mathrm{rg}_\mathbb{Q}\, v$
	K	$= k(X)$
	$k(X)_B$	
	$\mathcal{F}(X)$	
	v^U	$= v\vert_{K^U}$
	res_U^G	$= \mathcal{V}_\Lambda(K)^G \to \mathcal{V}_\Lambda(K^U)^T$
	$\mathcal{D}_Y(X)$	
	$\mathcal{B}_Y(X)$	$= \{v_D \mid D \in \mathcal{D}_Y(X), G\cdot D = D\}$
	$\mathcal{F}_Y(X)$	$= \mathcal{D}_Y(X) \cap \mathcal{F}(X)$
§4:	$\Gamma(X)$	$= K^{(B)}/(K^B)^\times$
	$\mathcal{K}_\gamma$	$= \{f \in K \mid \forall b \in B : f^b = \gamma(b) f\}$
	$\mathcal{K}$	$= \oplus_\gamma \mathcal{K}_\gamma$
	$\mathcal{H}_\Lambda(X)$	$= \mathrm{Hom}(\Gamma(X), \Lambda)$
	$\varphi * v$	
	v^B	$= v\vert_{K^B}$
	$\Delta(v)$	$= \mathrm{rg}\, v - \mathrm{rg}\, v^B$
	$\Delta_\mathbb{Q}(v)$	$= \mathrm{rg}_\mathbb{Q}\, v - \mathrm{rg}_\mathbb{Q}\, v^B$
§5:	v_0	Bewertung von K^B
	$\mathcal{Q}_{v_0}(K)$	$= K^{(B)}/\mathcal{O}_{v_0}^\times$
	$\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K)$	$= \{v \in \mathcal{V}_\Lambda(K) \mid \mathcal{O}_{v_0} \subseteq \mathcal{O}_v\}$
	$\mathcal{Z}_\Lambda(K)$	$= \mathcal{V}_\Lambda^o(K)^G$
	$\mathcal{C}(v_0)$	
§6:	$\mathcal{D}_{v_0}(X)$	
§7:	$N_v K$	
	$\mathcal{H}_v$	
§8:	$\mathcal{Z}_\Lambda^0(K)$	$= \mathcal{Z}_\Lambda(K) \cap -\mathcal{Z}_\Lambda(K)$
	$\mathcal{A}_X$	$= \ker[\mathrm{Aut}^G(X) \to \mathrm{Aut}_k(K^B)]$
§9:	W_X	
	$\mathcal{V}_\Lambda^{\mathrm{geo}}(K)$	$= \{v \in \mathcal{V}_\Lambda(K) \mid v^B \text{ geometrisch}\}$

1. Der lokale Struktursatz

In den ersten beiden Abschnitten werden einige wichtige Sätze zur Struktur der B-Operation auf einer G-Varietät X bewiesen. Da sie auch von unabhängigen Interesse sind, ist die Darstellung etwas ausführlicher, als für die weitere Arbeit nötig wäre.

Der lokale Struktursatz (Satz 1.2) wurde in Charakteristik Null etwas anders formuliert von Brion-Luna-Vust [BLV] bewiesen, und liefert eine wichtige Strukturaussage für die Operation von B. Für den Beweis brauchen wir folgendes wohlbekannte Lemma aus der Darstellungstheorie:

1.1. Lemma. *Sei V ein endlichdimensionaler G-Modul, der von $v \in V^{(B)}$ erzeugt werde und sei $W := V^\vee$ der duale Modul. Dann gilt:*

1. *χ_v ist das maximale Gewicht von V, d.h. für jedes andere Gewicht η ist $\chi_v - \eta$ Summe positiver Wurzeln. Seine Multiplizität ist eins.*
2. *Es gibt $w \in W$ mit $W^{(B^-)} = k^\times w$. Für dieses w gilt $\langle w, v\rangle \neq 0$ und $\chi_w = \chi_v^{-1}$.*
3. *Die Standgruppen von $\langle v\rangle$ und $\langle w\rangle$ sind einander gegenüberliegende parabolische Untergruppen.*

Beweis: V wird als Vektorraum von Gv und damit auch von der offenen Teilmenge $B^-Bv = B^-v$ aufgespannt. Der erste Punkt folgt nun aus der Darstellungtheorie auflösbarer Gruppen (vgl. [Hu] Prop. 27.2, 31.2).

Sei $w \in W^{(B^-)}$ und W' der von w aufgespannte Untermodul. Da V von v erzeugt wird, gilt $\langle W', v\rangle \neq 0$. Also ist χ_v^{-1} Gewicht von W'. Wendet man 1. auf (W', B^-, w) an, so ergibt sich $\chi_w = \chi_v^{-1}$. Da die Multiplizität gleich eins ist, folgt 2. Punkt 3 ist klar. □

Definition: Sei σ ein Schnitt eines Geradenbündels auf einer Varietät X. Dann bezeichne X_σ die offene Teilmenge aller Punkte von X, in denen σ nicht verschwindet.

1.2. Satz. *Sei X ein G-Varietät, $\mathcal{L}$ ein amples G-Geradenbündel auf X und σ ein B-semiinvarianter Schnitt von $\mathcal{L}$. Sei $P := G_{\langle\sigma\rangle}$. Dann gilt:*

1. *P_u operiert eigentlich auf X_σ, der Bahnenraum X_σ/P_u existiert, und der Quotientenmorphismus $\pi : X_\sigma \to X_\sigma/P_u$ ist affin.*
2. *Es gibt eine T-stabile, abgeschlossene Untervarietät $Z \subseteq X_\sigma$, so daß $P_u \times Z \to X_\sigma : (g, x) \mapsto gx$ und $Z \to X_\sigma/P_u$ endlich und surjektiv sind.*
3. *Sei* $\operatorname{char} k = 0$ *und L das Levikomplement von P, das T enthält. Dann kann man eine L-stabil Untervarietät $Z \subseteq X_\sigma$ finden, so daß $P_u \times Z \to X_\sigma$ und $Z \to X_\sigma/P_u$ Isomorphismen sind.*

Beweis: Als erstes reduzieren wir die Situation auf den Fall, daß X ein projektiver Raum ist. Durch Ersetzen von $(\mathcal{L}, \sigma)$ durch $(\mathcal{L}^N, \sigma^N)$ mit $N \gg 0$ können wir annehmen, daß $\mathcal{L}$

sehr ample ist. Dann enthält $H^0(X,\mathcal{L})$ einen endlichdimensionalen G-stabilen Untermodul $\overline{V}$, so daß der kanonische rationale Morphismus $X \to \mathbf{P}(\overline{V}^\vee)$ eine Einbettung ist. Sei weiter $V \subseteq H^0(X,\mathcal{L})$ der von σ erzeugte G-Untermodul. Setze $W := (V \oplus \overline{V})^\vee$ und $\sigma_0 := \sigma \oplus 0 \in V \oplus \overline{V} = H^0(\mathbf{P}(W), \mathcal{O}(1))$. Wir haben dann eine Einbettung $X \hookrightarrow \mathbf{P}(W)$, und es genügt, den Satz für $X = \mathbf{P}(W)$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$ und $\sigma = \sigma_0$ zu beweisen.

Sei $v \in V^\vee$ mit $V^{\vee(B^-)} = k^\times v$ und $\langle v, \sigma\rangle = 1$ (Lemma 1.1.2), und sei $\bar{v} = \langle v\rangle$ aufgefaßt als Punkt in $\mathbf{P}(W)$. Nach Konstruktion gilt $\bar{v} \in X_\sigma$. Nach Lemma 1.1.3 ist $G_{\bar{v}} \cap P_u = 1$. Wähle in $V^\vee$ ein T-stabiles Komplement S zum Tangentialraum $T_v P_u v \subseteq V$, und setze $Z := \mathbf{P}(S \oplus \langle v\rangle \oplus \overline{V}^\vee) \cap X_\sigma$. Wir untersuchen nun $\mu : X_1 := P_u \times Z \to X_\sigma$. Wähle eine Einparameteruntergruppe $\lambda : \mathbf{G}_m \to T$ mit $(\alpha, \lambda) > 0$ für alle positiven Wurzeln α. Insbesondere operiert $\mathbf{G}_m$ durch Konjugation kontrahierend auf P_u. Auf $W^\vee$ soll $\mathbf{G}_m$ folgendermaßen operieren: Auf $V^\vee$ operiere $\mathbf{G}_m$ mittels $\lambda(t)$, und auf $\overline{V}^\vee$ durch $t^{-N}\lambda(t)$. Dabei sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß χ_σ das größte Gewicht von W wird Nach Lemma 1.1.1 ist dies möglich. Dies induziert eine Operation auf X_1. Der Morphismus μ ist damit $\mathbf{G}_m$-äquivariant, und $\mathbf{G}_m$ operiert auf beiden Räumen kontrahierend mit dem Fixpunkt $v_1 := (1, \bar{v})$ bzw. $\bar{v}$, d.h. jede $\mathbf{G}_m$-stabile, abgeschlossene Teilmenge enthält den Fixpunkt. Nach Konstruktion ist v_1 ein isolierter Punkt der Faser $\mu^{-1}(\bar{v})$ und damit $\mu^{-1}(\bar{v}) = \{v_1\}$. Daraus folgt, daß μ endlich und dominant ist ([ZS], Lemma S. 198). Damit ist 2. bewiesen. Für $\operatorname{char} k = 0$ ist L linear reduktiv, d.h. man kann Z sogar L-stabil wählen. Weiterhin ist die Bahnenabbildung $P_u \to P_u\bar{v}$ ein Isomorphismus (P_u ist unipotent). Also ist μ étale in v_1 und damit wegen der $\mathbf{G}_m$-Äquivarianz ein Isomorphismus ([Sl] 8.1 Lemma 3). Daraus folgt 3.

Wir leiten nun 1. aus 2. ab. Für betrachte das Minimalpolynom von $f \in k[Z] = k[P_u \times Z]^{P_u}$ über dem Polynomring $k[X_\sigma]$. Da dieses eindeutig ist, sind seine Koeffizienten P_u-invariant. Also ist $k[Z]$ ist endlich über $k[X_\sigma]^{P_u}$. Insbesondere folgt, daß letztere Algebra endlich erzeugt ist. Wir setzen $X_\sigma/P_u := \operatorname{Spec} k[X_\sigma]^{P_u}$. Betrachte nun folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
P_u \times P_u \times Z & \xrightarrow{(uu',z,u',z)} & P_u \times Z \times P_u \times Z \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (u,u'z)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (uz,u'z')} \\
P_u \times X_\sigma & \xrightarrow{(ux,x)} & X_\sigma \times X_\sigma
\end{array}$$

Die senkrechten Pfeile sind eigentlich und surjektiv, und der obere horizontale Pfeil ist eine abgeschlossene Einbettung. Daraus folgt leicht mit Hilfe des Bewertungskriteriums, daß der untere Pfeil ebenfalls eigentlich ist, d.h. (per definitionem), daß die Wirkung von P_u auf X_σ eigentlich ist.

Es bleibt zu zeigen, daß die Fasern von $q : X_\sigma \to X_\sigma/P_u$ genau die Bahnen von P_u sind, oder äquivalent daß $P_u \times X_\sigma \to X_\sigma \times_{X_\sigma/P_u} X_\sigma$ surjektiv ist. Wie eben gesehen, ist das Bild abgeschlossen. Da die generischen Fasern Bahnen sind, ist das Bild eine irreduzible Komponente. Es genügt also zu zeigen, daß $X_\sigma \times_{X_\sigma/P_u} X_\sigma$ irreduzibel ist. Nun ist q äquidimensional (wegen der Existenz von Z), und damit universell offen ([EGA],IV§14.4.4). Also ist $X_\sigma \times_{X_\sigma/P_u} X_\sigma \stackrel{\mathrm{pr}_1}{\to} X_\sigma$ offen. Insbesondere bildet sich jede irreduzible Komponente dominant auf X_σ ab. Sei X_3 eine nicht leere, offene Teilmenge von X_σ/P_u, über der q irreduzible Fasern hat. Dann liegt über X_3 nur eine Komponente und es folgt die Behauptung. □

2. Existenz B-semiinvarianter Schnitte

Die im Satz gemachte Voraussetzung der Existenz eines amplen G-Geradenbündels ist wegen folgender Resultate von Sumihiro [Su] (s. auch [KKLV]) keine schwerwiegende Einschränkung vor allem, weil wir in dieser Arbeit nur an lokalen Resultaten interessiert sind:

2.1. Satz. *Sei X eine* normale *G-Varietät.*

1. *Jede Bahn besitzt eine G-stabile quasiprojektive offene Umgebung.*
2. *Sei X quasiprojektiv. Dann gibt es ein amples G-Geradenbündel auf X, d.h. X läßt sich äquivariant in einen projektiven Raum einbetten.*

Die nächsten Sätze dienen der Anwendbarkeit des lokalen Struktursatzes. In erster Linie geht es um die Konstruktion B-semiinvarianter Schnitte. Zunächst eine affine Version:

2.2. Satz. *Sei X ein affines G-Schema, und $Y \subseteq X$ ein G-stabiles, abgeschlossenes Unterschema.*

1. *Falls $k[X]$ endlich erzeugt ist, so ist auch $k[X]^U$ endlich erzeugt.*
2. *Für jedes $f \in k[Y]^U$ gibt es $q = p^N$ und $\overline{f} \in k[X]^U$ mit $\overline{f}|_Y = f^q$.*
3. *Für jedes $f \in k[Y]^{(B)}$ gibt es $q = p^N$ und $\overline{f} \in k[X]^{(B)}$ mit $\overline{f}|_Y = f^q$. Es gilt $\chi_{\overline{f}} = \chi_f^q$.*
4. *Sei A die kleinste G-stabile Unteralgebra von $k[X]$, die $k[X]^U$ enthält. Dann ist $k[X]$ eine ganze Erweiterung von A.*

Beweis: Für 1. und 2. siehe [Gr1]. Da B/U ein Torus und damit linear reduktiv ist, folgt 3. unmittelbar aus 2. Behauptung 4 ist [Gr2] Thm. 5. □

Die Variante für quasiprojektive Varietäten:

2.3. Korollar. *Sei X eine G-Varietät, $\mathcal{L}$ ein amples G-Geradenbündel auf X, $Y \subseteq X$ eine G-stabile, abgeschlossene Teilmenge, und σ ein B-semiinvarianter Schnitt von $\mathcal{L}|_Y$.*

Dann gibt es $N > 0$ mit der Eigenschaft, daß sich σ^N zu einem B-semiinvarianten Schnitt von $\mathcal{L}^N$ fortsetzen läßt.

Beweis: Durch Ersetzen von $\mathcal{L}$ durch eine genügend hohe Potenz können wir erreichen, daß $\mathrm{res}_Y : H^0(X, \mathcal{L}^i) \to H^0(Y, \mathcal{L}^i|_Y)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ surjektiv ist. Nun folgt die Behauptung aus dem vorhergehenden Satz für

$$\operatorname{Spec} \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^0(Y, \mathcal{L}^i|_Y) \subseteq \operatorname{Spec} \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{L}^i).$$

□

Wir untersuchen nun die parabolischen Untergruppen $P = G_{\langle\sigma\rangle}$.

Definition: Sei X eine G-Varietät. Dann sei $P(X)$ (bzw. $S(X)$) die größte Untergruppe $H \subseteq G$ mit $Hx = Bx$ (bzw. $Hx = Ux$) für alle x aus einer nicht leeren, offenen Teilmenge von X. Weiter sei $P_u(X) := P(X)_u$.

Offenbar ist $P(X)$ parabolisch und $S(X)$ horosphärisch, d.h. enthält U. Beides sind wichtige Invarianten von X.

Beispiel: Sei $P \subseteq G$ parabolisch und $X = G/P$. Dann ist $P(X)$ konjugiert zu einer P gegenüberliegenden parabolischen Untergruppe und $S(X) = P(X)$.

2.4. Lemma. *Sei $\mathcal{L}$ ein amples G-Geradenbündel auf einer G-Varietät X. Es gelte, daß jeder B-semiinvariante Schnitt von jeder Potenz $\mathcal{L}^i$ $(i \geq 0)$ schon G-semiinvariant ist. Dann operiert die Kommutatoruntergruppe G' von G trivial auf X. Insbesondere ist $P(X) = G$.*

Beweis: Wir können annehmen, daß X projektiv ist. Sei $A := \sum_{i=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{L}^i)$. Dann ist $\widetilde{X} := \operatorname{Spec} A$ der affine Kegel über X. Nach Voraussetzung sind alle B-Eigenvektoren in A schon Eigenvektoren von G. Es folgt, daß G' trivial auf A^U und damit auch trivial auf $k[G \cdot A^U]$ operiert. Nach [Gr2] Thm. 5 ist A ganz über $k[G \cdot A^U]$. Also operiert G' trivial auf A und damit auch auf $\widetilde{X}$ und X. □

Wir haben nun folgende Charakterisierung von $P(X)$:

2.5. Satz. *Sei X eine G-Varietät und $\mathcal{L}$ ein G-Geradenbündel auf X.*
1. *Für $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L})^{(B)}$ gilt $P(X) \subseteq G_{\langle\sigma\rangle}$.*
2. *Sei $\mathcal{L}$ ample. Dann gibt es ein $N > 0$ und ein $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^N)^{(B)}$ mit $G_{\langle\sigma\rangle} = P(X)$.*

Beweis: 1. Der Divisor $D := \{\sigma = 0\} = X \backslash X_\sigma \subseteq X$ ist B-stabil. Angenommen, D ist nicht $P(X)$-stabil. Dann ist $P(X)D$ dicht in X, d.h. die generische $P(X)$-Bahn trifft D. Diese ist aber gleich der generischen B-Bahn. Widerspruch! Also ist D stabil unter $P(X)$, und

$f(g,x) := (\sigma^g/\sigma)(x)$ ist eine invertierbare Funktion auf $P(X) \times X$. Nach [KKV] Prop. 1.1 gibt es dann invertierbare Funktionen f', f'' auf $P(X)$ bzw. X mit $f(g,x) = f'(g)f''(x)$ für alle g, x. Wegen $1 = f(1,x) = f'(1)f''(x)$ ist f unabhängig von x und damit $P(X) \subseteq G_{\langle\sigma\rangle}$.

2. Sei nun $\mathcal{L}$ ample. Angenommen, jedes $\sigma_0 \in H^0(X, \mathcal{L}^i)^{(B)}$ ist G-semiinvariant. Dann gilt nach obigem Lemma $P(X) = G$ und wir können σ beliebig wählen.

Andernfalls wählen wir σ_0 mit $P := G_{\langle\sigma_0\rangle} \neq G$. Per Induktion nach $\dim G$ gibt es auf X_{σ_0}/P_u eine reguläre Funktion f mit $L_{\langle f\rangle} = P(X_{\sigma_0}) \subseteq L := P/P_u$. Wir können f als P_u-invariante Funktion auf X_{σ_0} auffassen. Wähle nun $j > 0$ so groß, daß $\sigma := f\sigma_0^j$ ein Schnitt von $\mathcal{L}^{ij}$ ist. Dann sind die generischen Bahnen von $G_{\langle\sigma\rangle}$ und B auf X_{σ_0}/P_u und damit auf X dieselben, d.h. $G_{\langle\sigma\rangle} \subseteq P(X)$. □

2.6. Korollar. *Sei $X \to Y$ ein dominanter, G-äquivarianter Morphismus, oder sei $Y \subseteq X$ eine G-stabile Untervarietät. Dann ist $P(X) \subseteq P(Y)$.*

Beweis: Der erste Fall folgt unmittelbar aus der Definition, der zweite aus Satz 2.5 und Korollar 2.3. □

2.7. Korollar. *Für eine G-Varietät X sind äquivalent:*

1. *Die Kommutatoruntergruppe von G operiert trivial auf X.*
2. *$P(X) = G$.*

2.8. Satz. *Seien X, $\mathcal{L}$ und σ wie in Satz 2.5.2. Dann gilt:*

1. *Die Kommutatoruntergruppe von $P(X)$ operiert trivial auf $X_\sigma/P_u(X)$.*
2. *Für alle $x \in X_\sigma$ gilt $P_u(X)x = Ux = S(X)x$, sowie $P(X)x = Bx$. Insbesondere ist $X_\sigma/P_u(X)$ auch der Quotient nach U und nach $S(X)$.*
3. *Der Kern der Wirkung von $P(X)$ auf $X_\sigma/P_u(X)$ ist $S(X)$.*

Beweis: a) Die reduktive Gruppe $L := P(X)/P_u(X)$ operiert auf $X_0 := X_\sigma/P_u$ und die generischen Bahnen von B und L auf X_0 stimmen überein. 1. folgt nun aus Korollar 2.7.
b) Nach 1. operiert U trivial auf X_0, d.h. $Ux = P_u(X)x$ für alle $x \in X_\sigma$. Auch wegen 1. haben $P(X)$ und B dieselben Bahnen auf $X_\sigma/P_u(X)$ und damit auf X_σ.
c) Sei K der Kern der Wirkung. Wegen b) ist $K = S(X) \cap P(X)$. Wie im Beweis von $P(X) \subseteq G_{\langle\sigma\rangle}$ zeigt man, daß die Zusammenhangskomponente der Eins $S(X)^0$ in $G_{\langle\sigma\rangle} = P(X)$ und damit in K liegt. Aus 1. folgt also $P(X)' \subseteq S(X)^0 \subseteq P(X)$. Es folgt $S(X)_u = P_u(X)$ und damit $S(X) \subseteq N_G(P_u(X)) = P(X)$. Dies zeigt 3. Da $S(X)$ auch auf X_0 operiert, gilt die zweite Gleichheit in 2. □

2.9. Korollar. *$S(X)$ ist normal in $P(X)$ und der Quotient $A(X) := P(X)/S(X)$ ist ein Torus.*

Wenn man σ sorgfältig genug wählt, kann man folgendes erreichen:

2.10. Satz. *Sei $\mathcal{L}$ ein amples Geradenbündel auf einer G-Varietät X und $Y \subseteq X$ eine G-stabile abgeschlossene Untervarietät. Dann gibt es $N > 0$ und $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^N)^{(B)}$ mit:*

1. *X_σ ist affin.*
2. *$Y_\sigma = Y \cap X_\sigma \neq \varnothing$.*
3. *$G_{\langle\sigma\rangle} = P(Y)$.*
4. *Alle B-Bahnen in Y_σ sind abgeschlossen.*

Beweis: Wir können annehmen, daß X Untervarietät eines projektiven Raumes mit G-Operation ist. Sei $\overline{X}$ der Abschluß und $\partial X := \overline{X} \setminus X$. Mit Korollar 2.3 angewendet auf $\overline{Y} \cup \partial X \subseteq X$ erhält man $N_1 > 1$ und einen Schnitt $\sigma_1 \in H^0(X, \mathcal{L}^{N_1})^{(B)}$, der auf ∂X nicht aber auf Y verschwindet. Mit Satz 2.5.2 und Korollar 2.3 erhält man $N_2 > 0$ und $\sigma_2 \in H^0(X, \mathcal{L}^{N_2})^{(B)}$ mit $G_{\langle\sigma_2\rangle} = P(Y)$. Für $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$ sind dann schon Behauptungen 1. bis 3. erfüllt.

Auf der affinen Varietät $Y_0 := Y_{\sigma_3}/P_u(Y)$ operiert nur noch der Torus $A(Y) = P(Y)/S(Y)$ (Satz 2.8). Sei $Y_1 \subseteq Y_0$ die abgeschlossene Teilmenge aller Punkte, deren Standgruppe nicht trivial ist. Dann gibt es eine $P(Y)$-semiinvariante Funktion $f \neq 0$ auf Y_0, die auf Y_1 verschwindet. Wir fassen diese auch als Funktion auf Y_{σ_3} auf. Nach Satz 2.2 läßt sich f zu einer B-semiinvarianten Funktion $\overline{f}$ auf X_{σ_3} fortsetzen. Damit leistet $f\sigma_3^{N_3}$ mit $N_3 \gg 0$ das Gewünschte. □

Als Korollar möchte ich explizit vermerken:

2.11. Korollar. *Sei X eine normale G-Varietät und $Y \subseteq X$ eine G-stabile Untervarietät. Dann gibt es eine B-stabile offene affine Teilmenge $X_0 \subseteq X$ mit $X_0 \cap Y \neq \varnothing$.*

Beweis: Durch Verkleinern von X kann man erreichen (Satz 2.1), daß man in der Situation von Satz 2.10 ist. Aus Punkt 1 folgt dann die Behauptung. □

Definition: Sei $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe, und X eine G-Varietät. Dann sei

$$d_H(X) := \min_{x \in X} \operatorname{kodim}_X Hx = \operatorname{Tr.grad} k(X)^H/k.$$

Die *Kompliziertheit* $c(X)$ von X ist $d_B(X)$. Der *Rang* $\operatorname{rg} X$ von X ist $d_U(X) - d_B(X)$.

In der Situation des lokalen Struktursatzes (Satz 1.2) gilt offenbar: Kompliziertheit bzw. Rang von X (bzgl. G) und X_σ/P_u (bzgl. P/P_u)) gleich. Weiter gilt $\dim A(X) = \operatorname{rg} X$. Aus Satz 2.8 folgt (vgl. [Pan] §1):

2.12. Korollar. *Es gilt*

$$\dim X = c(X) + \operatorname{rg} X + \dim P_u(X).$$

Später benötigen wir noch:

2.13. Satz. *Sei X eine G-Varietät. Dann gibt es eine normale projektive G-Varietät $\widetilde{X}$ mit*

1. *$k(X)$ und $k(\widetilde{X})$ sind zueinander G-isomorph.*
2. *Für jede G-stabile Untervarietät $Y \subseteq \widetilde{X}$ gilt $P(Y) = P(X)$.*

Beweis: Nach Satz 2.1 und Satz 2.5 können wir annehmen, daß ein amples G-Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf X und $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L})^{(B)}$ mit $G_{\langle\sigma\rangle} = P(X)$ existiert. Sei $\widetilde{V} \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ der von σ aufgespannte G-Modul und $V = \widetilde{V}^\vee$. Nach Lemma 1.1.2 gibt es $v \in V^{(B^-)}$ mit $\langle \sigma, v\rangle \neq 0$, und so daß $Z := G\langle v\rangle$ die einzige abgeschlossene Bahn in $\mathbf{P}(V)$ ist. Nach Punkt 3 dieses Lemmas gilt $P(Z) = G_{\langle\sigma\rangle}$.

Sei nun $\widetilde{X}$ die Normalisierung des Abschlusses von $\operatorname{Spec} k(X)$ in $X \times \mathbf{P}(V)$. Dann hat $\widetilde{X}$ die behauptete Eigenschaft, denn sei $Y \subseteq \widetilde{X}$ eine abgeschlossene G-stabile Untervarietät. Dann ist Z im Bild von Y in $\mathbf{P}(V)$ enthalten. Also gilt nach Korollar 2.6

$$P(X) \subseteq P(Y) \subseteq P(Z) = G_{\langle\sigma\rangle} = P(X). \qquad \square$$

3. Invariante Bewertungen

Zunächst möchte ich an die wichtigsten Eigenschaften von Bewertungen erinnern. Beweise finden sich in [ZS] Chap. 4 und App. 2. Sei K eine endlich erzeugte Körpererweiterung von k und Λ eine linear geordnete kommutative Gruppe. Eine Λ-*Bewertung* von K (über k) ist eine Abbildung

$$v : K \longrightarrow \Lambda \cup \{\infty\}$$

mit folgenden Eigenschaften

1. $v(a) = \infty \Longleftrightarrow a = 0$,
2. $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in K$,
3. $v(ab) = v(a) + v(b)$ für alle $a, b \in K$.
4. $v(a) = 0$ für alle $a \in k^\times$.

Dann ist $\mathcal{O}_v := \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ der *Bewertungsring* von v. Er ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_v := \{a \in K \mid v(a) > 0\}$ und Restklassenkörper $k_v := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$. Zwei Bewertungen heißen *äquivalent*, wenn ihre Bewertungsringe übereinstimmen. Die *Wertegruppe* von v ist

$\Lambda(v) := v(K^\times) \subseteq \Lambda$. Die Menge der Λ-Bewertungen von K werde mit $\mathcal{V}_\Lambda(K)$ bezeichnet. Sei o die triviale Bewertung mit $o(K^\times) = 0$.

Die wichtigsten numerischen Invarianten einer Bewertung v sind folgende:

Die *Dimension* $\dim v := \mathrm{Tr.grad}\, k_v/k$,

die *Kodimension* $\mathrm{kodim}\, v := \mathrm{Tr.grad}\, K/k - \dim v$,

der *Rang* $\mathrm{rg}\, v := \mathrm{Krulldim}\, \mathcal{O}_v$,

der *rationale Rang* $\mathrm{rg}_\mathbb{Q}\, v := \dim_\mathbb{Q} \Lambda(v) \otimes \mathbb{Q}$,

der *Defekt** $\mathrm{def}\, v := \mathrm{kodim}\, v - \mathrm{rg}_\mathbb{Q}\, v$.

Alle diese Zahlen sind endlich und größer oder gleich null (für den Defekt siehe [ZS] App. 2, S. 334, Corollary). Der Rang läßt sich allein aus $\Lambda(v)$ ablesen: Er ist gleich der Anzahl der echten *isolierten Untergruppen*, d.h. derjenigen Untergruppen $\Lambda' \subsetneqq \Lambda(v)$ mit folgender Eigenschaft: Aus $a \in \Lambda'$, $b \in \Lambda(v)$ und $0 \le b \le a$ folgt $b \in \Lambda'$.

Es gilt $\mathrm{rg}\, v \le \mathrm{rg}_\mathbb{Q}\, v$ und $\mathrm{rg}\, v \le 1$ genau dann, wenn $\Lambda(v)$ zu einer Untergruppe von $\mathbb{R}$ (ordnungs-)isomorph ist. Im Falle $\mathrm{def}\, v = 0$ ist k_v/k eine endlich erzeugte Körpererweiterung und $\Lambda(v)$ eine endlich erzeugte Gruppe.

Sei $k \subseteq K_0 \subseteq K$ ein Zwischenkörper. Dann ist die Einschränkung $v_0 := v|_{K_0}$ wieder eine Bewertung und es gibt kanonische Inklusionen $k_{v_0} \subseteq k_v$, sowie $\Lambda(v_0) \subseteq \Lambda(v)$. Weiterhin sind die obigen Invarianten für v_0 kleiner oder gleich denen für v (für den Defekt siehe [ZS] App. 2, S. 333, Lemma 1).

Sei X eine Varietät mit Funktionenkörper K und v eine Bewertung von K. Das *Zentrum* von v in X ist eine abgeschlossene Untervarietät $Y \subseteq X$, so daß für den lokalen Ring $(\mathcal{O}_{X,Y}, \mathfrak{m}_{X,Y})$ gilt: $\mathcal{O}_{X,Y} \subseteq \mathcal{O}_v$ und $\mathfrak{m}_{X,Y} \subseteq \mathfrak{m}_v$. Das Zentrum ist eindeutig, wenn es existiert, und existiert genau dann für jedes v, wenn X vollständig ist. Falls X affin ist, existiert das Zentrum genau dann, wenn v auf $k[X]$ nicht negativ ist. In diesem Fall wird das Zentrum durch das Primideal $k[X] \cap \mathfrak{m}_v$ definiert.

Betrachte nun eine zusammenhängende algebraische Gruppe H und eine H-Varietät X mit Funktionenkörper $K := k(X)$. Das folgende Lemma erlaubt es, H-invariante Bewertungen zu konstruieren:

3.1. Lemma. *Sei $v \in \mathcal{V}(K)$.*

1. *Zu jedem $f \in K$ gibt es eine dichte offene Teilmenge $U_f \subseteq H$, so daß die Abbildung $h \mapsto v(f^h)$ konstant auf U_f ist.*
2. *Sei $\bar{v}(f)$ dieser konstante Wert. Dann ist $f \mapsto \bar{v}(f)$ eine H-invariante Bewertung.*
3. *Für $f \in k[X]$ ist $\bar{v}(f) = \min_{h \in H} v(f^h)$.*

---

* Dies ist meine Bezeichnung. Der Defekt wird implizit in [ZS] App. 2 behandelt.

Beweis: Für die ersten beiden Behauptungen siehe [Su] Sect. 4. Bei der dritten beachte man, daß der von f^h $(h \in H)$ aufgespannte Raum W endlichdimensional und damit die Teilräume $\{w \in W \mid v(w) \geq \lambda\}$ Zariski-abgeschlossen sind. $\square$

Definition: Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir sagen Λ sei *durch n teilbar*, wenn die Multiplikation mit n surjektiv ist. Wenn Λ durch jedes $n \geq 1$ teilbar ist, so heißt Λ *teilbar.*

3.2. Korollar. *Sei $X' \to X$ ein dominanter, H-äquivarianter Morphismus. Weiter sei Λ teilbar oder $k(X')/k(X)$ rein transzendent. Dann ist die Einschränkungsabbildung $\mathcal{V}_\Lambda(k(X'))^H \to \mathcal{V}_\Lambda(k(X))^H$ surjektiv.*

Beweis: In beiden Fällen läßt sich jede Λ-Bewertung v von $k(X)$ zu einer Λ-Bewertung v' von $k(X')$ liften. Falls v invariant ist, so ist $\overline{v'}$ aus Lemma 3.1 eine invariante Fortsetzung von v. $\square$

Folgendes Korollar ist sehr nützlich:

3.3. Korollar. *Sei $\mathcal{L}$ ein H-Geradenbündel auf X und v eine H-invariante Bewertung von $K = k(X)$. Für alle $\sigma, \eta \in H^0(X, \mathcal{L})$ mit $\eta \neq 0$ und alle $h \in H$ gilt dann $v(\eta^{-1}\sigma^h) = v(\eta^{-1}\sigma)$.*

Beweis: Sei $\widetilde{K}$ der Quotientenkörper von $\bigoplus_n H^0(X, \mathcal{L}^n)$, und $K_0 \subseteq \widetilde{K}$ die Elemente vom Grad null. Beachte $K_0 \subseteq K$. Dann gibt es nach Korollar 3.2 eine H-invariante Bewertung $\widetilde{v}$ von $\widetilde{K}$ mit $\widetilde{v}|_{K_0} = v|_{K_0}$. Damit folgt

$$v(\eta^{-1}\sigma^h) = \widetilde{v}(\eta^{-1}\sigma^h) = -\widetilde{v}(\eta) + \widetilde{v}(\sigma^h) = -\widetilde{v}(\eta) + \widetilde{v}(\sigma) = v(\eta^{-1}\sigma). \qquad \square$$

Sei nun wieder G ein zusammenhängende reduktive Gruppe.

3.4. Lemma. *Sei $\mathcal{L}$ ein G-Geradenbündel auf X. Sei $f \in K = k(X)$ und η ein B-semiinvarianter rationaler Schnitt von $\mathcal{L}$, so daß $\sigma_0 := f\eta \in H^0(X, \mathcal{L})$ regulär ist. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M^n \subseteq H^0(X, \mathcal{L}^n)$ der Unterraum, der von allen n-fachen Produkten $\sigma_0^{g_1} \ldots \sigma_0^{g_n}$ mit $g_\nu \in G$ aufgespannt wird. Dann gilt für alle G-invarianten Bewertungen v von K:*

$$v(f) = \min\{\tfrac{1}{n}v(\eta^{-n}\sigma) \mid n = p^N, N \in \mathbb{N}, \sigma \in (M^n)^{(B)}\}.$$

Beweis: Daß $v(f)$ nicht kleiner als die linke Seite ist, folgt aus Korollar 3.3. Noch zu zeigen ist die Gleichheit. Betrachte dazu den nullteilerfreien, graduierten Ring $R := \bigoplus_{n=0}^\infty M^n$ und $\widetilde{K} := \operatorname{Quot} R$. Wir haben $K_0 := \widetilde{K}_{\deg=0} \subseteq K$. Wähle eine G-invariante Fortsetzung $\widetilde{v}$ von $v|_{K_0}$ auf $\widetilde{K}$ (Korollar 3.2). Mit $\lambda := \widetilde{v}(\sigma_0)$ definieren wir für jedes $\rho = \sum_n \rho_n \in R$:

$$v'(\rho) := \min\{\widetilde{v}(\rho_n) - n\lambda \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Dann ist v' eine G-invariante Bewertung von R (siehe Satz 4.3), die so konstruiert ist, daß sie auf R keine negativen Werte annimmt. Weiterhin gilt $v'(\sigma_0) = 0$. Damit ist $\mathfrak{p} := R \cap \mathfrak{m}_{v'}$ ein Primideal mit $M \not\subseteq \mathfrak{p}$. Also existiert ein B-Eigenvektor $\rho \in M/(\mathfrak{p} \cap M) \subseteq R/\mathfrak{p}$. Nach Satz 2.2 angewendet auf $\operatorname{Spec} R/\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Spec} R$ gibt es $n = p^N \in \mathbb{N}$ und ein $\sigma \in (M^n)^{(B)}$ mit $\sigma + \mathfrak{p} = \rho^n$. Insbesondere ist $\sigma \notin \mathfrak{p}$, d.h. $v'(\sigma) = 0$. Also gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n} v(\eta^{-n}\sigma) = -\widetilde{v}(\eta) + \tfrac{1}{n}\widetilde{v}(\sigma) = -\widetilde{v}(\eta) + \tfrac{1}{n} v'(\sigma) + \lambda = \\ = -\widetilde{v}(\eta) + \quad 0 \quad + \widetilde{v}(\sigma_0) = v(\eta^{-1}\sigma_0) = v(f). \end{aligned}$$

□

Definition: Für eine normale G-Varietät X sei $k(X)_B$ die Algebra aller rationalen Funktionen, deren Polstellendivisor B-stabil ist. Weiterhin sei $\mathcal{F}(X)$ die Menge aller B-stabilen Primdivisoren, die *nicht* G-stabil sind.

Offenbar gilt $k(X)^{(B)} \subseteq k(X)_B$. Sei $X_0 \subseteq X$ offen und G-stabil. Weil jeder Divisor $D \subseteq X$ mit $D \cap X_0 = \varnothing$ automatisch G-stabil ist, gilt $k(X_0)_B = k(X)_B$ und $\mathcal{F}(X_0) = \mathcal{F}(X)$. Damit sieht man, daß $k(X)_B$ und $\mathcal{F}(X)$ nur von $k(X)$ und nicht von X selber abhängen.

3.5. Korollar. *Sei v_0 eine G-invariante Bewertung von $k(X)$. Dann gibt es zu jedem $f \in k(X)_B$ ein $q = p^n$ und $f' \in k(X)^{(B)}$ mit:*

$$\begin{aligned} &v_0(f') = v_0(f^q), && \\ &v(f') \geq v(f^q) && \textit{für alle } G\textit{-invarianten Bewertungen } v \textit{ von } k(X), \\ &v_D(f') \geq v_D(f^q) && \textit{für alle } D \in \mathcal{F}(X). \end{aligned}$$

Beweis: Wir können annehmen, daß X glatt ist. Sei $D_0 := \sum_D v_D(f) D$, wobei die Summe nur über alle B-stabilen Primdivisoren D zu erstrecken ist. Weiter sei η der kanonische rationale Schnitt von $\mathcal{L} := \mathcal{O}(-D_0)$. Indem wir gegebenenfalls G durch eine endliche Überlagerung ersetzen, können wir annehmen, daß G auf $\mathcal{L}$ operiert (vgl. [KKLV]). Wegen $f \in K_B$ ist $f\eta$ ein regulärer Schnitt von $\mathcal{L}$. Daher ist Lemma 3.4 anwendbar, und wir erhalten ein $q = p^N$ und $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^q)^{(B)}$, so daß $f' := \eta^{-q}\sigma$ folgende Eigenschaften hat:

a) Für jede G-invariante Bewertung v gilt $v(f') \geq v(f^q)$.
b) Für v_0 gilt $v_0(f') = v_0(f^q)$.
c) Für $D \in \mathcal{F}(X)$ gilt $v_D(f') = v_D(\eta^{-q}\sigma) \geq v_D(\eta^{-q}) = v_D(f^q)$ (nach Konstruktion von η).

□

Für $v \in \mathcal{V}_\Lambda(K)$ sei $v^U := v|_{K^U}$.

3.6. Korollar. *Sei X eine G-Varietät und $K = k(X)$. Dann ist die Einschränkungsabbildung*

$$\operatorname{res}_U^G : \mathcal{V}_\Lambda(K)^G \longrightarrow \mathcal{V}_\Lambda(K^U) : v \mapsto v^U$$

injektiv.

Beweis: Seien $v_1 \neq v_2 \in \mathcal{V}_\Lambda(K)^G$. Da X eine affine B-stabile offene Teilmenge enthält (Korollar 2.11), läßt sich jedes $f \in K$ als Quotient von zwei Elementen aus K_B darstellen. Daher gibt es $f \in K_B$ mit $v_1(f) \neq v_2(f)$. Sei o.B.d.A. $v_1(f) < v_2(f)$. Dann gibt es nach Korollar 3.5 ein $q = p^N$ und $f' \in K^{(B)}$ mit $v_1(f') = v_1(f^q) < v_2(f^q) \leq v_2(f')$. □

Die folgenden Sätze passen nicht ganz in den Fluß der Entwicklung, schließen sich jedoch unmittelbar an Korollar 3.5 an:

3.7. Korollar. *Sei X eine normale G-Varietät, $Y \subseteq X$ eine G-stabile Untervarietät und v eine G-invariante Bewertung von $k(X)$. Dann gilt für den lokalen Ring $(\mathcal{O}_{X,Y}, \mathfrak{m}_{X,Y})$ von X in Y:*

$$v(\mathcal{O}_{X,Y}) \geq 0 \Longleftrightarrow v(\mathcal{O}_{X,Y}^{(B)}) \geq 0.$$

Sei $v(\mathcal{O}_{X,Y}) \geq 0$. Dann gilt

$$v(\mathfrak{m}_{X,Y}) > 0 \Longleftrightarrow v(\mathfrak{m}_{X,Y}^{(B)}) > 0.$$

Beweis: Sei $v(\mathcal{O}_{X,Y}^{(B)}) \geq 0$. Angenommen, das Zentrum Z von v in X enthält Y nicht. Sei dann $X_0 \subseteq X \setminus Z$ offen, affin, B-stabil mit $YX_0 \cap Y \neq \varnothing$ (Korollar 2.11). Dann gibt es $f \in k[X_0]$ mit $v(f) < 0$. Nach Korollar 3.5 gibt es $f' \in k[X_0]^{(B)}$ mit $v(f') = v(f^q) < 0$. Widerspruch! Also gilt $Y \subseteq Z$.

Sei nun $v(\mathfrak{m}_{X,Y}^{(B)}) > 0$, aber $Y \subsetneqq Z$. Sei v' eine G-invariante Bewertung, deren Zentrum genau Y ist. Dann gibt es $f \in k[X_0]$ mit $f|_Z \neq 0$ und $f|_Y = 0$, d.h. $v(f) = 0$, aber $v'(f) > 0$. Nach Korollar 3.5 gibt es $f' \in k[X_0]^{(B)}$ mit $v(f') = v(f^q) = 0$ und $v'(f') \geq v'(f^q) > 0$, d.h. $f' \in k[X_0]^{(B)} \cap \mathfrak{m}_{v'} \subseteq \mathfrak{m}_{X,Y}^{(B)}$. Widerspruch! □

Definition: Sei X eine normale G-Varietät und $Y \subseteq X$ eine G-stabile Untervarietät. Dann sei $\mathcal{D}_Y(X)$ die Menge der B-stabilen Primdivisoren $D \subseteq X$ mit $Y \subseteq D$. Wir setzen

$\mathcal{B}_Y(X) := \{v_D \in \mathcal{V}_\mathbb{Z}(X)^G \mid D \in \mathcal{D}_Y(X) \text{ ist } G\text{-stabil}\}$

$\mathcal{F}_Y(X) := \mathcal{D}_Y(X) \cap \mathcal{F}(X)$.

Der Sinn dieser Definition ist, $\mathcal{D}_Y(X)$ durch Teilmengen von Objekten (nämlich $\mathcal{V}_\mathbb{Z}(X)^G$ und $\mathcal{F}(X)$) zu beschreiben, die nur von $k(X)$ und nicht von X selber abhängen. Der folgende Satz macht dann die Bedeutung G-invarianter Bewertung bei der Klassifikation äquivarianter Einbettungen aus.

3.8. Satz. *Sei X eine normale G-Varietät und $Y \subseteq X$ eine G-stabile Untervarietät. Dann ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,Y}$ eindeutig durch das Paar $(\mathcal{B}_Y(X), \mathcal{F}_Y(X))$ bestimmt.*

Beweis: Sei $X_0 \subseteq X$ offen, affin, B-stabil mit $X_0 \cap Y \neq \varnothing$ und setze

$$A := K_B \cap \bigcap_{v \in \mathcal{B}_Y(X)} \mathcal{O}_v \cap \bigcap_{D \in \mathcal{F}_Y(X)} \mathcal{O}_{v_D}.$$

Dann gilt $k[X_0] \subseteq A \subseteq \mathcal{O}_{X,Y}$ und $A^{(B)} = \mathcal{O}_{X,Y}^{(B)}$. Insbesondere ist $\mathcal{O}_{X,Y}$ die Lokalisierung von A in $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{m}_{X,Y}$. Nach Korollar 3.7 ist $\mathfrak{p}$ die Vereinigung aller $A \cap \mathfrak{m}_v$, wobei v alle G-invarianten Bewertungen mit $v(A^{(B)}) \geq 0$ durchläuft. □

Wir fahren nun mit der Untersuchung der Abbildung $v \mapsto v^U$ fort.

3.9. Satz. *Sei X eine G-Varietät und $v \in \mathcal{V}_\Lambda(k(X))$.*

1. *Die Kodimension, der Rang, der rationale Rang bzw. der Defekt von v und v^U sind gleich, sowie* $\dim v = \dim v^U + \dim P_u(X)$.
2. *k_v ist als Körper endlich erzeugt über k_{v^U}. Der Transzendenzgrad ist* $\dim P_u(X)$.
3. *$\Lambda(v)/\Lambda(v^U)$ ist eine endliche kommutative p-Gruppe. Ihre Ordnung ist unabhängig von Λ und v nach oben beschränkt.*

Beweis: Sei $P = P(X)$. Wir können X durch $\widetilde{X}$ aus Satz 2.13 ersetzen, d.h. X sei normal und projektiv, und für jede G-Untervarietät Y gilt $P(Y) = P$. Sei Y das Zentrum von v in X. Nach den Resultaten des ersten Abschnitts gibt es eine P-stabile offene affine Teilmenge $X_0 \subseteq X$ mit $X_0 \cap Y \neq \varnothing$, so daß der Bahnenraum $W := X_0/P_u = X_0/U$ existiert. Weiter gibt es $Z \subseteq X_0$, so daß $Z \times P_u \to X_0$ und $Z \to W$ eigentlich sind.

Sei $\widetilde{X}_0 := Z \times P_u$. Durch Ersetzen von Λ durch $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ können wir annehmen, daß Λ divisibel ist. Nach Korollar 3.2 läßt sich dann v zu einer P_u-invarianten Bewertung $\widetilde{v}$ von $k(\widetilde{X}_0)$ fortsetzen. Sei v' die Einschränkung von $\widetilde{v}$ auf $k[Z] = k[\widetilde{X}_0]^{P_u}$. Dies ist eine Fortsetzung von v^U. Bei algebraischen Erweiterungen ändern sich die Parameter $\dim, \ldots, \operatorname{def}$ nicht.

Nach Konstruktion hat v ein Zentrum in X_0 und ist damit nicht negativ auf $k[X_0]$. Dasselbe gilt dann für $\widetilde{v}$ auf $k[\widetilde{X}_0]$. Daher wird $\widetilde{v}$ eindeutig durch die Ideale $I_\lambda := \{f \in k[\widetilde{X}_0] \mid \widetilde{v}(f) \geq \lambda\}$ $(\Lambda \ni \lambda \geq 0)$ bestimmt. Diese sind P_u-invariant, und damit von der Form $J_\lambda \otimes k[P_u]$ mit $J_\lambda = I_\lambda \cap k[Z] = \{f \in k[Z] \mid v'(f) \geq \lambda\}$. Es folgt $k_{\widetilde{v}} = \operatorname{Quot}\big(k_{v'} \otimes_k k[P_u]\big)$ und $\Lambda(\widetilde{v}) = \Lambda(v')$. Damit folgt 1., 2., und daß $\Lambda(v)/\Lambda(v^U)$ eine endliche Gruppe ist. Daß sie eine p-Gruppe ist, folgt aus Lemma 3.4. Ihre Ordnung ist beschränkt durch den Grad von $\widetilde{X}_0 \to X_0$. Aus der Quasikompaktheit der Zariskitopologie folgt, daß man endlich viele solcher offenen Mengen X_0 finden kann, so daß jede G-stabile abgeschlossene Untervarietät eine dieser Mengen trifft. Damit ist die Ordnung nur abhängig von X (und der G-Operation darauf) beschränkt. □

4. Homogene Bewertungen

Im vorangehenden Abschnitt haben wir bewiesen, daß eine G-invariante Bewertung von $K = k(X)$ schon durch ihre Einschränkung auf K^U bestimmt ist. Diese eingeschränkte Bewertung ist dann $T \cong B/U$-invariant. Daher untersuchen wir nun Bewertungen, die unter einem Torus invariant sind. Setze

$$\Gamma(X) := \{\chi_f \in \mathcal{X}(B) \mid f \in K^{(B)}\}.$$

Nach Satz 2.8 ist $\Gamma(X) \subseteq \mathcal{X}(A(X))$ und der Quotient ist eine p-Gruppe. Es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow (K^B)^\times \longrightarrow K^{(B)} \longrightarrow \Gamma(X) \longrightarrow 1.$$

Aus Korollar 2.11 angewendet auf $Y = X$ folgt, daß K^U von $K^{(B)}$ erzeugt wird. Für $\gamma \in \Gamma(X)$ sei

$$\mathcal{K}_\gamma := \{f \in K^{(B)} \mid \chi_f = \gamma\} \cup \{0\}.$$

Dann ist $\mathcal{K} := \bigoplus_{\gamma\in\Gamma(X)} \mathcal{K}_\gamma$ ein graduierter Ring mit $\operatorname{Quot}\mathcal{K} = K^U$ und $\mathcal{K}_0 = K^B$. Für $f \in \mathcal{K}$ und $\gamma \in \Gamma(X)$ sei f_γ die γ-Komponente.

4.1. Lemma. *Sei X eine G-Varietät mit $K = k(X)$. Eine Bewertung v von K^U ist genau dann T-invariant, wenn für alle $f \in \mathcal{K}$ gilt:*

$$v(f) = \min_{\gamma\in\Gamma(X)} v(f_\gamma).$$

Beweis: „$\Leftarrow$“: trivial. „$\Rightarrow$“: Für $f \in \mathcal{K}$ sei $m(f) := \min_\gamma v(f_\gamma)$ und $S(f) := \{\gamma \in \Gamma(X) \mid v(f_\gamma) = m(f)\}$. Wir zeigen $v(f) = m(f)$ durch Induktion nach $|S(f)|$: Für $|S(f)| = 1$ ist dies klar. Sei nun $|S(f)| > 1$ und wähle $t \in T$, so daß die Werte $\gamma(t)$ mit $\gamma \in S(f)$ nicht alle gleich sind. Für ein $\gamma_0 \in S(f)$ sei $\overline{f} := f - \gamma_0(t)^{-1} f^t$. Dann gilt $m(\overline{f}) = m(f)$ und $|S(\overline{f})| < |S(f)|$, also nach Induktionsannahme $v(\overline{f}) = m(\overline{f})$. Mit $m(f) \le v(f) = \min\{v(f), v(f^t)\} \le v(\overline{f}) = m(f)$ folgt die Behauptung. □

4.2. Korollar. *Die Einschränkung $\mathcal{V}_\Lambda(K^U)^T \to \operatorname{Hom}(K^{(B)}, \Lambda)$ ist injektiv.*

Als nächstes untersuchen wir, was bei der Einschränkung von K^U auf K^B passiert. Dafür setzen wir $\mathcal{H}_\Lambda = \mathcal{H}_\Lambda(X) := \operatorname{Hom}(\Gamma(X), \Lambda)$.

4.3. Satz. *Für $\varphi \in \mathcal{H}_\Lambda$ und $v \in \mathcal{V}_\Lambda(K^U)^T$ sei*

$$\varphi * v : \mathcal{K} \longrightarrow \Lambda \cup \{\infty\} : \quad f \mapsto \min_{\gamma\in\Gamma(X)} \big(\varphi(\gamma) + v(f_\gamma)\big).$$

Dann definiert dies eine freie $\mathcal{H}_\Lambda$-Operation auf $\mathcal{V}_\Lambda(K^U)^T$, und die Bahnen sind genau die Fasern der Einschränkungsabbildung

$$\mathcal{V}_\Lambda(K^U)^T \longrightarrow \mathcal{V}_\Lambda(K^B) : \quad v \mapsto v|_{K^B}.$$

Beweis: Seien $v, v' \in \mathcal{V}_\Lambda(K^U)^T$ mit $v|_{K^B} = v'|_{K^B}$. Dann ist $\varphi : f \mapsto v'(f) - v(f)$ ein Homomorphismus von $K^{(B)}/K^{B\times} = \Gamma(X)$ nach Λ und es gilt $v' = \varphi * v$. Damit folgen alle Behauptungen, wenn wir nur zeigen, daß $\varphi * v$ tatsächlich eine Bewertung ist.

Sei $\widetilde{v} = \varphi * v$. Das einzige Problem ist eigentlich nur, die Produktregel $\widetilde{v}(f\overline{f}) = \widetilde{v}(f) + \widetilde{v}(\overline{f})$ nachzuweisen. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(f\overline{f}) &= \min_\eta \{\varphi(\eta) + v(\sum_{\gamma+\bar{\gamma}=\eta} f_\gamma \overline{f}_{\bar{\gamma}})\} \geq \\ &\geq \min_{\gamma,\bar{\gamma}} \{\varphi(\gamma+\bar{\gamma}) + v(f_\gamma \overline{f}_{\bar{\gamma}})\} = \widetilde{v}(f) + \widetilde{v}(\overline{f}). \end{aligned}$$

Sei $S(f) := \{\gamma \in \Gamma(X) \mid \widetilde{v}(f_\gamma) = \widetilde{v}(f)\}$. Führe auf $\Gamma(X)$ eine additive Totalordnung ein und setze damit $\gamma_0 = \max S(f)$, $\bar{\gamma}_0 = \max S(\overline{f})$ und $\eta = \gamma_0 + \bar{\gamma}_0$. Für $\gamma, \bar{\gamma} \in \Gamma$ mit $\gamma + \bar{\gamma} = \eta$ gilt dann

$$v(f_\gamma \overline{f}_{\bar{\gamma}}) - v(f_{\gamma_0} \overline{f}_{\bar{\gamma}_0}) = \widetilde{v}(f_\gamma \overline{f}_{\bar{\gamma}}) - \widetilde{v}(f_{\gamma_0} \overline{f}_{\bar{\gamma}_0}) \geq 0,$$

und aus „$= 0$“ folgt $\gamma = \gamma_0$, $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_0$. Also:

$$\widetilde{v}(f\overline{f}) \leq \varphi(\eta) + v(\sum_{\gamma+\bar{\gamma}=\eta} f_\gamma \overline{f}_{\bar{\gamma}}) = \varphi(\eta) + v(f_{\gamma_0}) + v(f_{\bar{\gamma}_0}) = \widetilde{v}(f) + \widetilde{v}(\overline{f}).$$

□

Beispiel: Sei $G = T$ ein Torus und $X = T$ mit der Operation durch Translation. Dann ist $K^B = k$ und damit $\operatorname{Hom}(\mathcal{X}(T), \Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_\Lambda(k(T))^T : \varphi \mapsto \varphi * o$.

Bemerkung: Der obige Satz ist allgemeiner für homogene Bewertungen von graduierten Algebren gültig. Genauer gesagt, kann $\Gamma(X)$ eine beliebige torsionsfreie abelsche Gruppe Γ und $\mathcal{K}$ eine Γ-graduierte Algebra mit Quotientenkörper K^U sein. Eine Bewertung heißt *homogen*, wenn die Formel aus Lemma 4.1 gilt.

Als nächstes untersuchen wir das Verhalten der verschieden Invarianten einer Bewertung bei Einschränkung auf K^B.

4.4. Satz. *Sei X eine G-Varietät mit $K = k(X)$ und sei $v \in \mathcal{V}_\Lambda(K)^G$, sowie $v^B := v|_{K^B}$. Setze*

$$\Delta(v) := \operatorname{rg} v - \operatorname{rg} v^B; \qquad \Delta_\mathbb{Q}(v) := \operatorname{rg}_\mathbb{Q} v - \operatorname{rg}_\mathbb{Q} v^B$$

Dann gilt

1. *k_v ist als Körper endlich erzeugt über k_{v^B}, und es gilt:*

$$\text{Tr.grad}\, k_v/k_{v^B} = \operatorname{rg} X + \dim P_u(X) - \Delta_{\mathbb{Q}}(v)$$

2. *$\Lambda(v)/\Lambda(v^B)$ ist eine endlich erzeugte kommutative Gruppe. Ihr Rang ist $\Delta_{\mathbb{Q}}(v)$.*
3. *Es gilt*

$$0 \leq \Delta(v) \leq \Delta_{\mathbb{Q}}(v) \leq \operatorname{rg} X.$$
$$\dim v = \dim v^B + \dim P_u(X) + \operatorname{rg} X - \Delta_{\mathbb{Q}}(v),$$
$$\operatorname{kodim} v = \operatorname{kodim} v^B + \Delta_{\mathbb{Q}}(v),$$
$$\operatorname{def} v = \operatorname{def} v^B.$$

Beweis: Da die abelsche Gruppe $\Gamma := \Gamma(X)$ frei ist, können wir für $K^{(B)} \twoheadrightarrow \Gamma := \Gamma(X)$ einen Schnitt $\gamma \mapsto e^\gamma \in K^{(B)}$ finden. Damit können wir $K^{(B)}$ mit $K^B \times \Gamma$ und $\mathcal{K}$ mit dem Gruppenring $K^B[\Gamma]$ identifizieren. Mit

$$\varphi : \Gamma \to \Lambda : \gamma \mapsto v(e^\gamma)$$

gilt dann für jedes $f = \sum_\gamma f_\gamma e^\gamma \in K^B[\Gamma]$:

$$v(f) = \min_\gamma \{v^B(f_\gamma) + \varphi(\gamma)\}.$$

Jedes $f_0 \in K^U$ läßt sich als Quotient f/f' mit $f, f' \in \mathcal{K}$ und $v(f') = 0$ schreiben. Daraus folgt, daß k_{v^U} der Quotientenkörper von $\mathcal{K}_v := (\mathcal{K} \cap \mathcal{O}_v)/(\mathcal{K} \cap \mathfrak{m}_v)$ ist. Dabei wird $\mathcal{K} \cap \mathcal{O}_v$ (bzw. $\mathcal{K} \cap \mathfrak{m}_v$) von allen fe^γ mit $f \in K^B$ und $v^B(f) + \varphi(\gamma) \geq 0$ (bzw. > 0) aufgespannt. Sei nun $\Gamma_0 := \{\gamma \in \Gamma \mid \varphi(\gamma) \in \Lambda(v^B)\}$. Da dies eine freie abelsche Gruppe ist, gibt es einen Homomorphismus $\psi : \Gamma_0 \to (K^B)^\times$ mit $v(\psi(\gamma)) = -\varphi(\gamma)$ für alle $\gamma \in \Gamma_0$. Dies liefert einen Isomorphismus $k_{v^B}[\Gamma_0] \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_v : fe^\gamma \mapsto f\psi(\gamma)e^\gamma$. Aus $\Gamma/\Gamma_0 \cong \Lambda(v^U)/\Lambda(v^B)$ und Satz 3.9 folgen dann alle Behauptungen bis auf die Ungleichung $\Delta(X) \leq \Delta_{\mathbb{Q}}(X)$. Diese ist eine Aussage über angeordnete Gruppen und läßt sich leicht durch Induktion nach $\operatorname{rg} v^U$ beweisen. □

4.5. Korollar. *Sei X eine G-Varietät und $v \in \mathcal{V}_\Lambda(k(X))^G$. Die Wertegruppe (bzw. der Restklassenkörper) von v ist genau dann endlich erzeugt (über k), wenn dies für v^B zutrifft.*

Definition: Eine Bewertung v mit $\operatorname{kodim} v \leq 1$ heißt *geometrisch.*

Bemerkung: a) Für eine nichttriviale geometrische Bewertung v gilt automatisch $\Lambda(v) \cong \mathbb{Z}$ und k_v ist als Körper endlich erzeugt über k mit dem Transzendenzgrad $\dim X - 1$.

b) Sei X normal und $D \subseteq X$ ein Primdivisor. Dann ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,D}$ ein Bewertungsring zu genau einer $\mathbb{Z}$-Bewertung v_D mit $\Lambda(v_D) = \mathbb{Z}$. Diese Bewertung ist geometrisch. Umgekehrt ist jede nichttriviale geometrische Bewertung äquivalent zu einem v_D für eine geeignete Varietät X mit $k(X) = K$ und einem Primdivisor $D \subseteq X$. Falls v invariant ist, so werden wir später sehen (Korollar 7.2), daß man für X eine G-Varietät und D einen G-stabilen Divisor wählen kann.

4.6. Korollar. *Sei X eine G-Varietät mit $c(X) \leq 1$. Dann ist jede G-invariante $\mathbb{Q}$-Bewertung geometrisch.*

5. Der Konvexitätssatz

Wir diskutieren nun das Bild von $\mathcal{V}_\Lambda(K)^G$ in $\mathcal{V}_\Lambda(K^U)^T$.

5.1. Satz. *Sei $\mathcal{L}$ ein amples G-Geradenbündel auf einer G-Varietät X und sei $A \subseteq K = k(X)$ die von allen rationalen Funktionen $\sigma^{-1}\sigma^g$ mit $g \in G$, $n \geq 1$ und $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^n)^{(B)}$ erzeugte Unteralgebra. Sei Λ durch p teilbar. Dann ist*

$$\operatorname{res}_U^G \mathcal{V}_\Lambda(K)^G = \{v' \in \mathcal{V}_\Lambda(K^U)^T \mid v'(A^{(B)}) \geq 0\}.$$

Beweis: „$\subseteq$“ folgt aus Korollar 3.3. Wir zeigen „$\supseteq$“. Sei dazu $Q_n := H^0(X, \mathcal{L}^n)$ und $Q := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Q_n$. Für $v' \in \mathcal{V}_\Lambda(K^U)^T$ mit $v'(A^U) \geq 0$ sei $R \subseteq K$ die Unteralgebra erzeugt von

$$\{\eta^{-1}\sigma^g \mid g \in G, n \in \mathbb{N}, \sigma, \eta \in Q_n^{(B)} \text{ mit } v'(\eta^{-1}\sigma) \geq 0\}.$$

Wir zeigen zuerst $v'(R^U) \geq 0$. Für ein $\sigma \in Q^{(B)}$ bezeichne $[\sigma]$ den von σ aufgespannten G-Modul. Dann ist R Vereinigung von Räumen der Form

$$M = \sum_\nu (\eta_{\nu,1}^{-1}[\sigma_{\nu,1}]) \ldots (\eta_{\nu,s_\nu}^{-1}[\sigma_{\nu,s_\nu}])$$

mit $\eta_{\nu,\mu}, \sigma_{\nu,\mu} \in Q_{n_{\nu,\mu}}^{(B)}$ und $v'(\eta_{\nu,\mu}^{-1}\sigma_{\nu,\mu}) \geq 0$. Durch Hinzufügen von Faktoren der Form $\eta_{\nu,\mu}^{-1}[\eta_{\nu,\mu}]$ kann man annehmen, daß die Nenner unabhängig von ν sind, d.h.

$$M = (\eta_1 \ldots \eta_s)^{-1}\widetilde{M} \quad \text{mit} \quad \widetilde{M} = \sum_{\nu=1}^{r} [\sigma_{\nu,1}] \ldots [\sigma_{\nu,s}]$$

und mit $v'(\eta_\mu^{-1}\sigma_{\nu,\mu}) \geq 0$.

Sei nun $\sigma_0 \in \widetilde{M}^U$ und $f = (\eta_1 \ldots \eta_s)^{-1}\sigma_0 \in M^U$. Satz 2.2 hat folgende (wohlbekannte) Konsequenz: Sei $V \to W$ ein surjektiver Homomorphismus zwischen G-Moduln und $w \in$

W^U. Dann können wir w als (lineare) Funktion auf $W^\vee \subseteq V^\vee$ auffassen. Also gibt es ein $q = p^N$ und $v \in S^q(V)^U$, so daß v auf $w^q \in S^q(W)$ abgebildet wird. Wenden wir diese Überlegung auf $W = \widetilde{M} = (\sum_\nu \ldots)$ und $V = (\bigoplus_\nu \ldots)$ an, so erhalten wir ein Element aus

$$S^q\Big(\bigoplus_{\nu=1}^{r}[\sigma_{\nu,1}]\ldots[\sigma_{\nu,s}]\Big)^U,$$

das auf σ_0^q abgebildet wird. Es folgt, daß f^q Summe von Elementen aus Räumen folgender Form ist:

$$(\bar\eta_1\ldots\bar\eta_{qs})^{-1}\big([\bar\sigma_1]\ldots[\bar\sigma_{qs}]\big)^U \subseteq (\bar\eta_1^{-1}\bar\sigma_1)\ldots(\bar\eta_{qs}^{-1}\bar\sigma_{qs})A^U.$$

Also gilt $v'(R^U) \geq 0$.

Für das Ideal $I \subseteq R$, das von Elementen der Form $\eta^{-1}\sigma^g$ mit $g \in G$ und $\sigma, \eta \in Q_n^{(B)}$ mit $v'(\eta^{-1}\sigma) > 0$ erzeugt wird, folgt genauso $v'(I^U) > 0$. Insbesondere gilt $I \neq R$. Daher gibt es eine Bewertung v von $\widetilde{K} := \operatorname{Quot} Q$ mit $v(R) \geq 0$ und $v(I) > 0$ ([ZS], Ch. VI, §4, Thm. 4). Die Wertegruppe $\Lambda(v)$ hat allerdings a priori keine Beziehung zu $\Lambda(v')$.

Die Bewertung v braucht nicht G-invariant zu sein. Sei daher $\bar v$ die nach Lemma 3.1 zugeordnete invariante Bewertung. Für jedes $\sigma \in Q_n^{(B)}$ und $g \in G$ gilt $\sigma^{-1}\sigma^g \in A \subseteq R$ und damit $v(\sigma^g) \geq v(\sigma)$. Nach Lemma 3.1.3 stimmen daher $\bar v$ und v auf $K^{(B)}$ überein.

Sei $f \in K^{(B)}$. Dann gilt nach Konstruktion

$$\begin{aligned} v'(f) \geq 0 \Rightarrow & f \in R \Rightarrow \bar v(f) = v(f) \geq 0,\\ v'(f) < 0 \Rightarrow & v'(f^{-1}) > 0 \Rightarrow f^{-1} \in I \Rightarrow \bar v(f) = v(f) < 0. \end{aligned}$$

Also ist $\bar v|_{K^U}$ äquivalent zu v', d.h. $\bar v|_K$ ist eine invariante Fortsetzung von v'. Nach Satz 3.9 sind die Wertegruppen $\Lambda(\bar v|_K)$ und $\Lambda(v')$ bis auf p-Torsion zueinander isomorph. Wegen der p-Teilbarkeit von Λ induziert dann $\Lambda(v') \hookrightarrow \Lambda$ eindeutig einen Homomorphismus $\Lambda(\bar v|_K) \hookrightarrow \Lambda$. Damit wird $\bar v|_K$ zu einer Λ-Bewertung. $\square$

Der vorangehende Satz ist in der Praxis untauglich, um die Menge der invarianten Bewertungen effektiv zu bestimmen. Er liefert aber wichtige qualitative Resultate. Zu ihrer Formulierung ist es zweckmäßig folgende Bezeichnungen einzuführen.

Wir wählen eine feste Bewertung v_0 von K^B. Wichtig ist dabei nur die Äquivalenzklasse von v_0, d.h. der Ring $\mathcal{O}_{v_0}$. Damit setzen wir $\mathcal{Q}_{v_0}(K) := K^{(B)}/\mathcal{O}_{v_0}^\times$. Wegen $\mathcal{O}_{v_0}^\times \subseteq (K^B)^\times$ erhalten wir folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \Lambda(v_0) \longrightarrow \mathcal{Q}_{v_0}(K) \longrightarrow \Gamma(K) \longrightarrow 0.$$

Weiter sei

$$\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K) := \{v \in \mathcal{V}_\Lambda(K) \mid \mathcal{O}_{v_0} \subseteq \mathcal{O}_v\}.$$

Einschränken induziert eine Abbildung

$$\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K)^G \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(K), \Lambda),$$

die nach Korollar 3.6 injektiv ist. Wir fassen ab jetzt die linke Menge als Teilmenge der rechten auf. Insbesondere ist

$$\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K^U)^T = \{\varphi : \mathcal{Q}_{v_0}(K) \to \Lambda \mid \varphi(\Lambda(v_0)^+) \geq 0\}.$$

Besonders wichtig ist der Fall $v_0 = o$. In diesem Fall ist $\mathcal{Q}_o(K) = \Gamma(K)$ und $\mathcal{V}_\Lambda^o(K^U)^T = \mathcal{H}_\Lambda(K) = \mathrm{Hom}(\Gamma(K), \Lambda)$.

Definition: Eine G-invariante Bewertung v von K mit $v^B = o$ heißt *zentral*. Wir fassen die Menge $\mathcal{Z}_\Lambda(K) := \mathcal{V}_\Lambda^o(K)^G$ der zentralen Λ-Bewertungen als Teilmenge der Gruppe $\mathcal{H}_\Lambda(K)$ auf.

Also ist $\mathcal{V}_\Lambda(K)^G$ die Vereinigung aller $\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K)^G$, wobei v_0 alle Äquivalenzklassen von Bewertungen von K^B durchläuft, und jede dieser Mengen enthält $\mathcal{Z}_\Lambda(K)$. Daher kommt der Name „zentral". Wir werden später (Satz 7.3) sehen, daß der Begriff einer zentralen Bewertung folgende geometrische Bedeutung hat: Sei $D \subseteq X$ ein Primdivisor. Dann ist die zugehörige Bewertung v_D genau dann zentral, wenn D die höchstmögliche Kompliziertheit hat, d.h. wenn $c(D) = c(X)$ ist.

Sei nun

$$\mathcal{C}(v_0) := \left\{ f \in \mathcal{Q}_{v_0}(K) \;\middle|\; \begin{array}{l} v(f) \geq 0 \text{ für alle invarianten Bewer-} \\ \text{tungen } v \text{ von } K \text{ mit } \mathcal{O}_{v_0} \subseteq \mathcal{O}_v \end{array} \right\}$$

Man beachte, daß $\mathcal{C}(v_0)$ nicht von Λ abhängt. Offenbar ist $\Lambda(v_0)^+ \subseteq \mathcal{C}(v_0)$. Damit haben wir:

5.2. Korollar. *Sei Λ durch p teilbar und v_0 eine Bewertung von K^B. Dann gilt:*

1. $\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K)^G = \{v \in \mathrm{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(K), \Lambda) \mid v(\mathcal{C}(v_0)) \geq 0\}$.
2. $\mathcal{Z}_\Lambda(K) * \mathcal{V}_\Lambda(K)^G = \mathcal{V}_\Lambda(K)^G$.
3. $\mathcal{V}_\mathbb{R}^{v_0}(K)^G \subseteq \mathrm{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(K), \mathbb{R})$ *ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel.*
4. *Sei*

$$C := \{\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{X}(T), \mathbb{R}) \mid \varphi(\alpha) \leq 0 \textit{ für alle positiven Wurzeln } \alpha\}.$$

Dann enthält $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}(K)$ das Bild von C in $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(K)$. Insbesondere hat $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}(K)$ ein nichtleeres Inneres und ist der Abschluß von $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}(K)$.

Beweis: Zu 1. Die Inklusion „$\subseteq$" ist trivial. Sei nun $v \in \mathcal{V}_{\Lambda}^{v_0}(K^U)^T$ mit $v(\mathcal{C}(v_0)) \geq 0$, und sei $\mathcal{A}(v_0)$ das Bild von $A^{(B)}$ in $\mathcal{Q}_{v_0}(K)$. Aus Satz 5.1 folgt $\mathcal{A}(v_0) \subseteq \mathcal{C}(v_0)$ und damit auch die G-Invarianz von v.
Zu 2. und 3. Nach 1. wird $\mathcal{V}_{\Lambda}^{v_0}(K)^G$ durch lineare Ungleichungen definiert.
Zu 4. Die Algebra A wird von Räumen der Form $\sigma^{-1}[\sigma]$ aufgespannt, in denen alle Gewichte Summe von negativen Wurzeln sind. Dies zeigt die Behauptung. □

6. Ein Endlichkeitssatz

Hauptziel dieses Abschnittes ist es, folgenden Satz zu beweisen:

6.1. Satz. *Sei X eine G-Varietät mit Funktionenkörper K und v_0 eine* geometrische *Bewertung von K^B. Dann ist $\mathcal{C}(v_0)$ ein endlich erzeugtes Monoid.*

Zum Beweis des Satzes brauchen wir mehrere Lemmata. Sei $\mathcal{D}_{v_0}(X)$ die Menge aller B-stabilen Primdivisoren $D \subseteq X$ mit $\mathcal{O}_{v_0} \subseteq \mathcal{O}_{X,D}$.

6.2. Lemma. *$\mathcal{D}_{v_0}(X)$ ist endlich.*

Beweis: Sei $X' \subseteq X$ eine offene, dichte, B-stabile Teilmenge, so daß der Bahnenraum X'/B existiert. Dann ist $D \in \mathcal{D}_{v_0}(X)$ entweder eine irreduzible Komponente von $X \setminus X'$ oder das Urbild des Zentrums von v_0 in X'/B. □

6.3. Lemma. *Es gibt eine normale, projektive G-Varietät $\widetilde{X}$ mit $k(\widetilde{X}) = K$, so daß für jedes $v \in \mathcal{V}_{\Lambda}^{v_0}(K)^G$ mit Zentrum $Z \subseteq \widetilde{X}$ gilt:*

a) Jedes $D \in \mathcal{D}_{v_0}(\widetilde{X})$ mit $Z \subseteq D$ ist G-invariant.

b) $\mathcal{O}_{v_0} \subseteq \mathcal{O}_{\widetilde{X},Z}$.

Beweis: Sei zunächst X_1 irgendeine projektive G-Varietät mit $k(X_1) = K$ und mit einem amplen G-Geradenbündel $\mathcal{L}$. Die Menge $\mathcal{F}(v_0) := \mathcal{D}_{v_0}(X_1) \cap \mathcal{F}(K)$ der nicht G-stabilen Elemente von $\mathcal{D}_{v_0}(X_1)$ ist endlich. Also existiert ein Schnitt $\eta \in H^0(X_1, \mathcal{L}^i)^{(B)}$, der auf allen $D \in \mathcal{F}(v_0)$ verschwindet. Sei M der von η erzeugte G-Modul. Es sei noch bemerkt, daß $\mathcal{F}(v_0)$ nur von K nicht aber vom Modell X_1 abhängt.

Da v_0 geometrisch ist, gibt es Funktionen $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{O}_{v_0}$, so daß $\mathcal{O}_{v_0}$ die Lokalisierung von $S_0 := k[f_1, \ldots, f_s]$ am Primideal $\mathfrak{m}_{v_0} \cap S_0$ ist. Wähle weiter $\sigma_0 \in H^0(X, \mathcal{L}^j)^{(B)}$, so daß $\sigma_\nu := f_\nu \sigma_0$ ein regulärer Schnitt ist. Sei $\overline{M}$ der von $\sigma_0, \ldots, \sigma_s$ erzeugte G-Modul.

Wir definieren nun $\widetilde{X}$ als die Normalisierung des Abschlusses des Bildes von $\operatorname{Spec} K$ in $X_1 \times \mathbf{P}(M^\vee) \times \mathbf{P}(\overline{M}^\vee)$. Weiterhin setzen wir $\widetilde{X}_0 := \{x \in \widetilde{X} \mid \sigma_0(x) \neq 0, \eta(x) \neq 0\}$. Dies ist ein affine Teilmenge von $\widetilde{X}$.

Sei nun $v \in \mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K)^G$ mit Zentrum $Z \subseteq \widetilde{X}$. Nach Korollar 3.3 ist $v(\sigma_0^{-1}\overline{M}) \geq 0$, sowie $v(\eta^{-1}M) \geq 0$. Es folgt $v(k[\widetilde{X}_0]) \geq 0$ und damit $Z \cap \widetilde{X}_0 \neq \varnothing$. Nach Konstruktion von η ist aber $D \cap \widetilde{X}_0 = \varnothing$ für alle $D \in \mathcal{F}(v_0)$. Daraus folgt a).

Nach Konstruktion ist läßt sich jedes $f \in \mathcal{O}_{v_0}$ als h_1/h_2 mit $h_1, h_2 \in S_0$ und $v_0(h_2) = 0$ darstellen. Insbesondere gilt $v(h_2) = 0$. Aus $f_i = \sigma_0^{-1}\sigma_i \in k[\widetilde{X}_0] \subseteq \mathcal{O}_{\widetilde{X},Z}$ folgt damit $h_1, h_2 \in \mathcal{O}_{\widetilde{X},Z}$ mit $h_2 \notin \mathfrak{m}_{\widetilde{X},Z}$. Daraus folgt b). □

Der Satz folgt nun aus dem folgenden Lemma zusammen mit dem Gordanschen Lemma.

6.4. Lemma. *Sei $\widetilde{X}$ wie im vorhergehenden Lemma und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_{v_0}(\widetilde{X})$ die Menge aller G-stabilen Elemente. Dann ist*

$$\mathcal{C}(v_0) = \{f \in \mathcal{Q}_{v_0}(K) \mid v_D(f) \geq 0 \textit{ für alle } D \in \mathcal{D}\}.$$

Beweis: Für $D \in \mathcal{D}$ ist $v_D \in \mathcal{V}_\mathbb{Z}^{v_0}(K)^G$. Damit folgt die Inklusion „$\subseteq$“ aus der Definition von $\mathcal{C}(v_0)$.

Für die umgekehrte Inklusion sei $v \in \mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K)^G$ und Z das Zentrum von v in $\widetilde{X}$. Sei $f \in K^{(B)}$ mit $v_D(f) \geq 0$ für alle $D \in \mathcal{D}$. Wir müssen $v(f) \geq 0$ zeigen. Sei dazu D_0 eine Komponente des Polstellendivisors von f mit $Z \subseteq D_0$. Aus Lemma 6.3b) folgt $\mathcal{O}_{v_0} \subseteq \mathcal{O}_{\widetilde{X},Z} \subseteq \mathcal{O}_{\widetilde{X},D_0}$ und damit $D_0 \in \mathcal{D}_{v_0}(\widetilde{X})$. Aus Teil a) folgt dann sogar $D_0 \in \mathcal{D}$ und damit $v_{D_0}(f) \geq 0$ im Widerspruch zur Wahl von D_0. Also ist Z nicht im Polstellendivisor von f enthalten, d.h. $f \in \mathcal{O}_{\widetilde{X},Z} \subseteq \mathcal{O}_v$ und damit $v(f) \geq 0$. □

6.5. Korollar. *Sei v_0 eine geometrische Bewertung von K^B. Dann ist*

$$\mathcal{V}_\mathbb{Q}^{v_0}(K)^G \subseteq \operatorname{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(K), \mathbb{Q})$$

ein endlich erzeugter, konvexer Kegel mit nicht leerem Inneren. Insbesondere trifft dies auf die Menge der zentralen Bewertungen $\mathcal{Z}_\mathbb{Q}(K) \subseteq \mathcal{H}_\mathbb{Q}(K)$ zu. Für $v_0 \neq o$ bildet $\mathcal{Z}_\mathbb{Q}(K)$ eine Kodimension-1-Seite von $\mathcal{V}_\mathbb{Q}^{v_0}(K)^G$.

Beweis: Dies folgt mit Satz 6.1 aus Korollar 5.2. □

7. Vergleichssätze

In diesem Abschnitt vergleichen wir Eigenschaften von K mit denen des Restklassenkörpers k_v einer invarianten Bewertung v.

7.1. Lemma. *Sei X eine G-Varietät, v eine invariante Bewertung von $k(X)$ und seien $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{O}_v$. Dann gibt es eine normale, projektive G-Varietät $\widetilde{X}$ mit $k(\widetilde{X}) = k(X)$ und $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{O}_{\widetilde{X},Z}$, wobei Z das Zentrum von v in $\widetilde{X}$ ist.*

Beweis: O.B.d.A. sei X projektiv und besitze ein amples G-Geradenbündel $\mathcal{L}$ mit einem Schnitt σ_0, so daß die $\sigma_i := f_i\sigma_0$ regulär sind. Sei dann M der von $\sigma_0, \ldots, \sigma_s$ aufgespannte G-Modul und $\widetilde{X}$ die Normalisierung des Abschlusses von $\operatorname{Spec} K$ in $X \times \mathbf{P}(M^\vee)$. Nach Korollar 3.3 ist $v(\sigma_0^{-1}M) \geq 0$, d.h. $Z \cap \widetilde{X}(\sigma_0) \neq \varnothing$ und $f_i \in k[\widetilde{X}(\sigma_0)] \subseteq \mathcal{O}_{\widetilde{X},Z}$. □

7.2. Korollar. *Sei $v \neq o$ eine invariante geometrische Bewertung. Dann gibt es eine normale G-Varietät $\widetilde{X}$ mit $k(\widetilde{X}) = K$ und einen G-stabilen Primdivisor $D \subseteq \widetilde{X}$, so daß v zu v_D äquivalent ist.*

Beweis: Wende obiges Lemma auf Funktionen $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{O}_v$ an, deren Restklassen k_v erzeugen. □

7.3. Satz. *Sei X eine G-Varietät und v eine invariante Bewertung von $k(X)$. Dann gilt:*

1. *k_v^U (bzw. k_v^B) ist eine rein inseparable Erweiterung von k_{v^U} (bzw. k_{v^B}).*
2. *Die Kompliziertheit von k_v ist gleich $\dim v^B = c(X) - \operatorname{kodim} v^B$.*
3. *Der Rang von k_v ist gleich $\operatorname{rg} X - \Delta_{\mathbb{Q}}(v)$.*

Beweis: Sei $\overline{f} \in k_v^U$ und $f_1 \in \mathcal{O}_v$ mit Restklasse $\overline{f}$. Seien $\widetilde{X}$ und Z wie in Lemma 7.1 (mit $s = 1$), und $\overline{f}_1 := f_1|_Z$. Nach Konstruktion gilt $\overline{f}_1 \in k(Z)^U$. Mit Satz 2.2 sieht man leicht, daß es ein $q = p^N$ gibt, so daß sich $\overline{f}_1^q$ zu einem $f \in \mathcal{O}^U_{\widetilde{X},Z}$ fortsetzen läßt. Aus $\overline{f}^q \equiv f \bmod \mathfrak{m}_v$ folgt 1. für U-Invarianten. Die Aussage für k_v^B beweist man genauso. Die Punkte 2 und 3 ergeben sich aus dem ersten durch eine leichte Rechnung. □

Satz 6.1 liefert Vergleichssätze zwischen der Menge der Bewertungen von X und gewissen Untervarietäten. Seien dazu Λ' und Λ'' zwei geordnete abelsche Gruppen, und $\Lambda := \Lambda' \oplus \Lambda''$ versehen mit der lexikographischen Ordnung. Eine Λ-Bewertung v von K ist dann ein Paar (v', v''), wobei v' eine Λ'-Bewertung von K ist, und $v'' : K \to \Lambda'' \cup \{\infty\}$ folgende Eigenschaft hat: Für alle $f, g \in K$ gilt

1. $v'(f) > v'(g) \Longrightarrow v''(f + g) = v''(g)$
2. $v'(f) = v'(g) \Longrightarrow v''(f + g) \geq \min(v''(f), v''(g))$
3. $v''(fg) = v''(f) + v''(g)$

Dies läßt sich folgendermaßen umformulieren: Für $\lambda' \in \Lambda'$ sei $K_{\geq\lambda'} := \{f \in K \mid v'(f) \geq \lambda'\}$. Entsprechend sei $K_{>\lambda'} := \{f \in K \mid v'(f) > \lambda'\}$, und

$$N_{v'}K := \operatorname{Quot} \bigoplus_{\lambda' \in \Lambda'} K_{\geq\lambda'}/K_{>\lambda'}.$$

Dies ist der Körper der rationalen Funktionen auf dem *Normalenbündel von K in v'*. Damit definieren wir

$$\bar{v} : N_{v'}K \longrightarrow \Lambda'' \cup \{\infty\} : \bar{f} = \sum_{\lambda'} \bar{f}_{\lambda'} \mapsto \min_{\lambda' \in \Lambda'} v''(f_{\lambda'}).$$

Dann ist $\bar{v}$ eine wohldefinierte homogene Λ''-Bewertung von $N_{v'}K$ (siehe Bemerkung nach Satz 4.3). Dies bedeutet: Eine Λ-Bewertung v ist dasselbe wie eine Λ'-Bewertung v' von K und eine homogene Λ''-Bewertung $\bar{v}$ des Normalenbündels $N_{v'}K$. Wie die homogenen Bewertungen von $N_{v'}K$ mit denen des Restklassenkörpers $k_{v'}$ zusammenhängen siehe Satz 4.3.

Der nächste Satz vergleicht invariante Bewertungen von K und k_v, wenn v zentral ist.

7.4. Satz. *Sei X eine G-Varietät, v eine zentrale Bewertung von $K = k(X)$ und $\overline{K} := N_vK$. Weiter sei v_0 eine geometrische Bewertung von K^B.*

1. *Es gibt kanonische völlig inseparable Einbettungen $K^B \hookrightarrow k_v^B$ und $K^U \hookrightarrow \overline{K}^U$. Dabei wird $f \in K^{(B)}$ auf $f + K_{>v(f)} \in K_{\geq v(f)}/K_{>v(f)}$ abgebildet.*
2. *Jede G-invariante Bewertung von $\overline{K}$ ist homogen.*
3. *Sei Λ durch p teilbar. Wenn man die Λ-Bewertung von $\overline{K}^U$ mit denen von K^U identifiziert, gilt*

   $$\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(\overline{K})^G = \mathcal{H}_v * \mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K)^G.$$

   Dabei bezeichne $\mathcal{H}_v \subseteq \mathcal{H}_\Lambda(K)$ die Menge aller Homomorphismen $\Gamma(K) \to \Lambda$, die durch $v : \Gamma(K) \to \Lambda(v)$ faktorisieren.
4. *Es gibt eine kurze exakte Sequenz*

   $$0 \longrightarrow \mathcal{H}_v \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(K), \Lambda) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(k_v), \Lambda) \longrightarrow 0,$$

   und $\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(k_v)^G$ ist das Bild von $\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K)^G$.
5. *Konkret heißt dies für $\Lambda = \mathbb{Q}$: Die Menge $\mathcal{V}_\mathbb{Q}^{v_0}(\overline{K})^G$ ist der von $\mathcal{V}_\mathbb{Q}^{v_0}(K)^G$ und $-v$ aufgespannte konvexe Kegel, und $\mathcal{V}_\mathbb{Q}^{v_0}(k_v)^G$ ist das Bild von $\mathcal{V}_\mathbb{Q}^{v_0}(K)^G$ in* $\operatorname{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(k_v), \mathbb{Q}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(K), \mathbb{Q})/\mathbb{Q}v$.

Beweis: 1. Sei $R \subseteq K^U$ die von $K^{(B)}$ aufgespannte Unteralgebra. Da $v(f)$ wegen $v^B = o$ nur von χ_f abhängt, ist die von v auf R induzierte Filtrierung T-stabil. Daher induziert die

angegebene Abbildung $K^{(B)} \to \overline{K}$ einen injektiven Algebrenhomomorphismus $R \longrightarrow \overline{K}^U$ und damit $K^U \hookrightarrow \overline{K}^U$ und $K^B \hookrightarrow k_v^B = \overline{K}^B_{\deg=0}$. Daß diese Körpererweiterungen völlig inseparabel sind, folgt leicht mit Satz 7.3 und Satz 3.9.3.
2. Jedes Element aus $\overline{K}^{(B)}$ ist homogen. Also ist auch jede T-invariante Bewertung von $\overline{K}^U$ homogen.
3. Sei $\overline{\Lambda} := \Lambda(v) \oplus \Lambda$ lexikographisch geordnet. Nach der Diskussion oben ist $\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(\overline{K})^G$ gleich der Menge der G-invarianten $\overline{\Lambda}$-Bewertungen (v', v'') von K mit $v' = v$ und $v''(\mathcal{O}_{v_0}) \geq 0$, und damit gleich

$$\mathcal{V} := \{v'' \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(K), \Lambda) \mid v''(f) \geq 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{C}(v_0) \text{ mit } v(f) = 0\}.$$

Daraus folgt „$\supseteq$“.

Seien $f_1, \ldots, f_s$ Erzeuger von $\mathcal{C}(v_0) \subseteq \mathcal{Q}_{v_0}(K)$ (Satz 6.1) und $M := \{v(f_i) \in \Lambda(v) \mid v(f_i) \neq 0\} > 0$. Dann sieht man leicht durch Induktion nach $\operatorname{rg}\Lambda(v)$, daß es einen Homomorphismus $\varphi : \Lambda(v) \to \mathbb{Z}$ gibt mit $\varphi(M) \geq 1$. Sei nun $v'' \in \mathcal{V}$ und $\lambda := \min\{0, v''(f_1), \ldots, v''(f_s)\}$. Dann ist $(-\lambda\varphi \circ v) * v''$ nicht negativ für alle f_i und damit in $\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K)^G$. Daraus folgt „$\subseteq$“.
4. Dieser Punkt folgt aus 3. und Satz 4.3.
5. Dies ist eine Umformulierung von 3. und 4. für $\Lambda = \mathbb{Q}$. $\square$

Im nächsten Satz ist umgekehrt v beliebig (mit v^B geometrisch) und wir untersuchen zentrale Bewertungen von k_v. Wir verzichten diesmal darauf, Bewertungen des Normalenbündels zu betrachten.

7.5. Satz. *Sei X eine G-Varietät und v eine G-invariante Bewertung von $K = k(X)$, so daß $v_0 := v^B$ geometrisch ist.*

1. *Sei $\Gamma' := \{\chi_f \in \mathcal{X}(T) \mid f \in \mathcal{Q}_{v_0}(K), v(f) = 0\}$. Dann ist $\Gamma' \subseteq \Gamma(k_v)$ und der Quotient ist eine p-Gruppe.*
2. *Sei Λ durch p teilbar. Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(\Lambda(v), \Lambda) \xrightarrow{\circ v} \operatorname{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(K), \Lambda) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\Gamma(k_v), \Lambda) \longrightarrow 0,$$

und $\mathcal{Z}_\Lambda(k_v)$ ist das Bild von $\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K)^G$.

Beweis: 1. Dieser Teil folgt sofort aus Satz 7.3.1.
2. Die exakte Sequenz folgt aus 1. Sei wieder $\overline{\Lambda} := \Lambda(v) \oplus \Lambda$, und wir betrachten invariante $\overline{\Lambda}$-Bewertungen (v', v'') mit $v' = v$ und $v''((K^B)^\times) = 0$. Damit erhält man, daß $\mathcal{Z}_\Lambda(k_v)$ mit

$$\{v'' \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(K), \Lambda) \mid v''(f) \geq 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{C}(v_0) \text{ mit } v(f) = 0\}$$

identifiziert werden kann. Genau wie im vorhergehenden Satz ergibt sich daraus $\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K)^G \twoheadrightarrow \mathcal{Z}_\Lambda(k_v)$. □

Bemerkung: Die beiden Vergleichssätze haben einen „nichttrivialen Durchschnitt“, nämlich den Fall $v_0 = o$.

8. Der lineare Anteil des Bewertungskegels

Als nächstes untersuchen wir die größte Untergruppe $\mathcal{Z}_\Lambda^0(K)$, die in $\mathcal{Z}_\Lambda(K)$ enthalten ist. Falls Λ durch p teilbar gilt nach Korollar 5.2

$$\mathcal{Z}_\Lambda^0(K) = \mathcal{Z}_\Lambda(K) \cap -\mathcal{Z}_\Lambda(K) = \{v \in \mathcal{H}_\Lambda(K) \mid v(\mathcal{C}(o)) = 0\}.$$

Die nächsten Sätze zeigen, daß diese Gruppe eng mit der Automorphismengruppe von X zusammenhängt.

8.1. Satz. *Sei X eine G-Varietät und $H \subseteq \mathrm{Aut}^G(X)$ eine zusammenhängende algebraische Gruppe mit $K^B \subseteq K^H$. Dann gilt:*

1. *H ist ein Torus und es gilt $K^{(B)} \subseteq K^{(H)}$. Dies induziert einen surjektiven Homomorphismus $\Gamma(X) \twoheadrightarrow \mathcal{X}(H)$.*
2. *H operiert trivial auf $\mathcal{V}_\Lambda(K)^G$, auf der Menge der G-Bahnen, sowie auf der Menge der B-stabilen Divisoren von X.*
3. *H operiert auf jeder normalen G-Varietät $\widetilde{X}$ mit $k(\widetilde{X}) = K$.*
4. *Sei Λ durch p teilbar und $\varepsilon : \mathcal{V}_\Lambda(K)^H \to \mathcal{V}_\Lambda(K^H)$ die Einschränkungsabbildung. Dann ist $\mathcal{V}_\Lambda(K)^G$ das volle Urbild von $\mathcal{V}_\Lambda(K^H)^G$ unter ε. Insbesondere ist $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}(H), \Lambda) = \varepsilon^{-1}(o) \subseteq \mathcal{Z}_\Lambda^0(X)$.*

Beweis: Mit Satz 2.1 (Sumihiro) können wir annehmen, daß es ein amples $G \times H$-Bündel $\mathcal{L}$ auf X gibt und daß X normal und projektiv ist. Setze $Q_n := H^0(X, \mathcal{L}^n)$ und $Q := \bigoplus_n Q_n$. Für $\sigma \in Q_n^{(B)}$ und $h \in H$ ist $\sigma^{-1}\sigma^h \in K^B \subseteq K^H$. Dies bedeutet für den Nullstellendivisor D von σ, daß $hD - D$ invariant unter H ist. Andererseits enthält $hD - D$ keine H-invarianten Komponenten, d.h. D ist H-invariant und damit $\sigma \in Q^{(H)}$. Daraus folgt $K^{(B)} \subseteq K^{(H)}$.

Sei H_0 die Zusammenhangskomponente des Durchschnitts der Kerne aller Charaktere χ_f von H mit $f \in K^{(B)}$. Dann ist H/H_0 ein Torus. Nach Konstruktion operiert H_0 durch Multiplikation mit einem Charakter $\chi_n \in \mathcal{X}(H_0)$ auf Q_n^U. Wegen $\chi_m\chi_n = \chi_{m+n}$, sobald $Q_m, Q_n \neq 0$, gibt es ein $\chi_1 \in \mathcal{X}(H_0)$ mit $\chi_n = \chi_1^n$ für alle $n \geq 0$. Durch Multiplikation der Operation von H_0 auf $\mathcal{L}$ mit dem Charakter χ_1^{-1} können wir $\chi_1 = 1$ annehmen. Dann operiert H_0 trivial auf Q^U und damit auch auf der kleinsten G-stabilen Algebra Q', die

Q^U enthält. Nach Satz 2.2.4 ist Q ganz über Q'. Also operiert H_0 trivial auf Q und damit auf X. Es folgt $H_0 = 1$, d.h. H ist ein Torus.

Sei $\chi \in \mathcal{X}(H)$. Dann gibt es $f \in K^{(H)}$ mit $\chi_f = \chi$. Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in Q_n^{(H)}$ mit $f = \sigma_1^{-1}\sigma_2$ und wähle $\eta_i \in \langle B\sigma_i\rangle^{(B)}$. Dann gilt $f_0 := \eta_1^{-1}\eta_2 \in K^{(B)}$ und $\chi_{f_0} = \chi$. Damit ist Punkt 1 vollständig bewiesen.

Aus Korollar 3.6 und Korollar 4.2 folgt nun, daß H jede G-invariante Bewertung festläßt. Da jede G-Bahn das Zentrum einer G-invarianten Bewertung ist, operiert H auch trivial auf der Menge der G-Bahnen. Jeder B-invariante Divisor ist eine Komponente des Nullstellendivisors eines Elementes in $Q_n^{(B)} \subseteq Q_n^{(H)}$ und ist daher H-invariant. Dies zeigt Punkt 2. Punkt 3 folgt aus 2. mit Hilfe von Satz 3.8.

Sei $v \in \mathcal{V}_\Lambda(K)^H$, so daß $v|_{K^H}$ invariant unter G ist. Wir müssen zeigen, daß v ebenfalls G-invariant ist. Dazu können wir annehmen, daß Λ durch p teilbar ist. Betrachte nun die Algebra A, die von allen $\sigma^{-1}\sigma^g$ mit $g \in G$ und $\sigma \in Q_n^{(B)}$ erzeugt wird. Wegen $Q_n^{(B)} \subseteq Q_n^{(H)}$ gilt $A \subseteq K^H$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 5.1. $\square$

Es gilt folgende Umkehrung obigen Satzes:

8.2. Satz. *Sei X eine normale G-Varietät. Dann gibt es eine normale G-Varietät X', einen G-Morphismus $\psi : X \to X'$ und einen Torus $H \subseteq \mathrm{Aut}^G(X')$ mit:*

1. *ψ ist völlig inseparabel (d.h. bijektiv).*
2. *ψ induziert $k(X')^U \xrightarrow{\sim} k(X)^U$.*
3. *$k(X')^B \subseteq k(X')^H$.*
4. *Für jedes durch p teilbare Λ gilt $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}(H), \Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}^0_\Lambda(X') = \mathcal{Z}^0_\Lambda(X)$.*

Beweis: Sei X zunächst affin. Wir setzen $\Phi_\mathbb{Q} := \mathrm{Hom}(\mathcal{Z}^0_\mathbb{Q}(X), \mathbb{Q})$. Dies ist ein Quotient von $\Gamma(K) \otimes \mathbb{Q}$. Für $\varphi \in \Phi_\mathbb{Q}$ sei

$$R_\varphi := \big\{f \in k[X] \,\big|\, v(f) \geq \varphi(v) \text{ für alle } v \in \mathcal{Z}^0_\mathbb{Q}(X)\big\},$$

Wegen $R_\varphi \cdot R_{\varphi'} \subseteq R_{\varphi+\varphi'}$ ist $R := \bigoplus_\varphi R_\varphi$ eine Algebra.

Wir zeigen zuerst, daß der kanonische Homomorphismus $R \to k[X]$ injektiv ist. Andernfalls gibt es ein $f = \sum_\varphi f_\varphi \in R^{(B)}$ das im Kern liegt. Sei $v \in \mathcal{Z}^0_\mathbb{Q}(X)$. Wegen $v' := -v \in \mathcal{Z}^0_\mathbb{Q}(X)$ gilt für alle φ mit $f_\varphi \neq 0$:

$$\varphi(v) \leq v(f_\varphi) = -v'(f_\varphi) \leq -\varphi(v') = \varphi(v).$$

Wegen $\varphi(v) = v(f_\varphi) = \langle v, \chi_f\rangle$ ist φ das Bild von χ_f unter $\Gamma(K)\otimes\mathbb{Q} \twoheadrightarrow \Phi_\mathbb{Q}$, d.h., es existiert nur ein φ mit $f_\varphi \neq 0$. Dann ist aber $f = f_\varphi = 0$. Widerspruch!

Also ist R eine G-stabile Unteralgebra von $k[X]$, die $k[X]^U$ enthält. Nach Satz 2.2.4 ist $k[X]$ endlich über R. Insbesondere ist R endlich erzeugt. Sei $X' := \operatorname{Spec} R$, und Φ die Untergruppe von $\operatorname{Hom}(\mathcal{Z}^0_{\mathbb{Q}}(X), \mathbb{Q})$, die von allen φ mit $R_\varphi \neq 0$ erzeugt wird. Da Φ alle Einschränkungen von Charakteren B-semiinvarianter Funktionen enthält, gilt $\Phi \otimes \mathbb{Q} = \operatorname{Hom}(\mathcal{Z}^0_{\mathbb{Q}}(X), \mathbb{Q})$. Sei H nun der Torus mit Charaktergruppe Φ. Die Φ-Graduierung von R liefert dann eine Operation von H auf X'.

Als nächstes zeigen wir, daß X völlig inseparabel über $\operatorname{Spec} R$ ist. Sei dazu $\widetilde{R}$ der separable Abschluß von R in $k[X]$, und $\widetilde{X} := \operatorname{Spec} \widetilde{R}$. Dann ist $\widetilde{X}$ normal und $\widetilde{X} \to X'$ eine verzweigte Überlagerung mit $k(\widetilde{X})^B = k(X')^B =: k_0$. Sei nun R_0 (bzw. $\widetilde{R}_0$) die von R (bzw. $\widetilde{R}$) erzeugte k_0-Algebra und X'_0, $\widetilde{X}_0$ seien ihre Spektren. Nach Konstruktion hat $B_0 := B \times_k k_0$ eine offene Bahn Z_0 in $\widetilde{X}_0$. Da B_0 eine zerfallende auflösbare Gruppe ist, besitzt Z_0 einen k_0-rationalen Punkt x_0. Sei $L \subseteq B_0$ sein Standgruppenschema, sowie L' das des Bildes von x_0 in X'_0. Nach Konstruktion gibt es einen Homomorphismus

$$H_0 := H \times_k k_0 \hookrightarrow \operatorname{Aut}^{B_0}(B_0/L') \cong N_{B_0}(L')/L'.$$

Das Bild von H_0 ist ein Torus, und läßt sich bis auf Isogenie zu einem Torus $\widetilde{H}_0 \subseteq N_{B_0}(L')$ liften. Weil $\widetilde{X}_0 \to X'_0$ separabel ist, gilt $L^0 = (L')^0$ und damit

$$N_{B_0}(L')^0 = N_{B_0}(L^0)^0 = N_{B_0}(L)^0.$$

Damit operiert $\widetilde{H}_0$ ebenfalls auf $Z_0 = B_0/L$ und damit auf $k_0(Z_0) = k(\widetilde{X})$. Weil $\widetilde{H}_0$ isogen zum Torus H_0 ist, zerfällt er ebenfalls über k_0. Es folgt, daß es genau einen über k definierten Torus $\widetilde{H}$ mit $\widetilde{H}_0 = \widetilde{H} \times_k k_0$ gibt. Dieser Torus $\widetilde{H}$ operiert auf $k(\widetilde{X})$ und damit auch auf $\widetilde{R}$ (dem ganzen Abschluß von R in $k(\widetilde{X})$). Es folgt, daß sich die Graduierung von R zu einer Graduierung von $\widetilde{R}$ fortsetzen läßt. Aus der Definition von R folgt daraus $\widetilde{R} = R$, und damit daß $X \to X'$ völlig inseparabel ist.

Damit sind die Behauptungen 1 bis 3 nachgewiesen und Behauptung 4 für $\Lambda = \mathbb{Q}$. Für allgemeines Λ folgt sie aus

$$\mathcal{Z}^0_\Lambda(X) = \{v \in \mathcal{H}_\Lambda(X) \mid v(\mathcal{C}(o)) = 0\}.$$

Sei nun X beliebig. Dann können wir eine nicht leere, offene G-stabile Teilmenge $X_0 \subseteq X$ finden, die sich äquivariant in einen projektiven Raum einbetten läßt. Sei $\widetilde{X} \subseteq \mathbf{A}^{N+1}$ der affine Kegel über dem Abschluß $\overline{X}_0$. Sei $R \subseteq k[\widetilde{X}]$ wie oben definiert, und X_1 das Bild von X_0 in $\operatorname{Proj} R$. Durch weiteres Verkleinern von X_0 und X_1 kann man erreichen, daß $X_0 \to X_1$ endlich ist. Für $q = p^n$ sei $X \to X^{(q)}$ die n-fache Iteration des relativen Frobeniusmorphismus. Dann gibt es ein n, so daß der Morphismus $X_0 \hookrightarrow X \to X^{(q)}$ durch

$X_0 \to X_1$ faktorisiert. Sei $X_1 \hookrightarrow X' \to X^{(q)}$ die kanonische Faktorisierung in eine offene Einbettung und einen endlichen Morphismus. Dann setzt sich $X_0 \to X_1 \to X'$ zu einem völlig inseparablen G-Morphismus $\varphi : X \to X'$ fort. Nach Satz 8.1.3 operiert H ebenfalls auf X'. □

Diese Sätze lassen eine andere Interpretation zu: Sei $\mathcal{A}_X$ der Kern von

$$\mathrm{Aut}_k^G(k(X)) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{Aut}_k(k(X)^B).$$

Dann ist die Zusammenhangskomponente der eins ein Torus, dessen Dimension (nach einer völlig inseparablen Modifikation von X) gleich $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}^0_{\mathbb{Q}}(X)$ ist. Für Varietäten mit dichter Bahn, kann man etwas mehr sagen:

8.3. Korollar. *Sei X eine G-Varietät mit $K^G = k$, d.h. mit einer dichten Bahn Gx_0. Dann ist $\mathcal{A}_X$ eine algebraische Gruppe und zwar das semidirekte Produkt einer diagonalisierbaren Gruppe mit einer endlichen p-Gruppe (als Normalteiler).*

Falls X normal und die Standgruppe von x_0 schematisch reduziert ist (z.B. $X = G/H$), dann ist $\dim \mathcal{A}_X = \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}^0_{\mathbb{Q}}(X)$.

Beweis: Wegen $\mathcal{A}_X \subseteq \mathrm{Aut}^G(Gx_0) = N_G(G_{x_0})/G_{x_0}$ ist $\mathcal{A}_X$ eine algebraische Gruppe. Jedes Element von $\mathcal{A}_X$ bildet generische B-Bahnen auf sich selbst ab. Man kann endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_s \in X$ finden, so daß

$$\mathcal{A}_X \longrightarrow \mathrm{Aut}^B(Bx_1) \times \ldots \times \mathrm{Aut}^B(Bx_s)$$

injektiv ist. Es folgt, daß $\mathcal{A}_X$ ein Subquotient einer triangulierbaren Gruppe und damit selbst triangulierbar ist. Insbesondere ist $\mathcal{A}_X$ ein semidirektes Produkt einer diagonalisierbaren Gruppe und einer unipotenten Gruppe $\mathcal{A}_u$. Nach Satz 8.1 ist $\mathcal{A}_u$ endlich. Dies zeigt den ersten Teil.

Sei $H := G_{x_0}$ reduziert und sei $\psi : X \to X'$ wie in Satz 8.2. Dann hat $\mathcal{A}_{X'}$ die „richtige" Dimension. Jedes $g \in G$, das $G_{\psi(x_0)}$ (als Untergruppenschema) normalisiert, normalisiert auch $H = G^{\mathrm{red}}_{\psi(x_0)}$. Damit ist auch $\mathcal{A}_{G/H} = \mathcal{A}_X$ genügend groß. □

Bemerkung: 1. Für $K^G \neq k$ ist $\mathcal{A}_X$ im allgemeinen keine algebraische Gruppe. Sei z.B. $G = \mathbb{G}_m$ und G operiere auf dem ersten Faktor von $X = G \times Y$ (Y beliebig). Jede invertierbare Funktion f auf Y liefert durch $(g, y) \mapsto (f(y)g, y)$ ein Element von $\mathcal{A}_X$ und man sieht leicht, daß alle Elemente von $\mathcal{A}_X$ von dieser Form sind. Also ist $\mathcal{A}_X$ isomorph zur Gruppe $k[Y]^\times$, welche im allgemeinen nicht algebraisch ist.
2. Das folgende Beispiel zeigt, daß H im allgemeinen nicht auf X selbst operiert: Sei $\operatorname{char} k = 2$, $G := SL_2$ und M die adjungierte Darstellung von G, d.h. die Menge aller

spurlosen 2×2-Matrizen. Setze nun $X := \mathbf{P}(M)$. Sei weiter $V^{(4)}$ ein zweidimensionaler Vektorraum, auf dem G mittels

$$\begin{pmatrix} a_{11}^4 & a_{12}^4 \\ a_{21}^4 & a_{22}^4 \end{pmatrix}$$

operiert, und $X_1 := \mathbf{P}(V^{(4)} \oplus k)$ mit $\varphi : X \to X_1$ induziert durch

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{11} \end{pmatrix} \mapsto (\begin{pmatrix} x_{12}^2 \\ x_{21}^2 \end{pmatrix}, x_{11}^2 + x_{12}x_{21}).$$

Dann haben wir $k(X)^B = k(X_1)^B = k$, $\operatorname{Aut}_G X = 1$, aber $H = \operatorname{Aut}_G X_1 = \mathbf{G}_m$.
3. Aus $k[\widetilde{X}]^U = k[X']^U$ folgt in Charakteristik null sofort $\widetilde{X} = X'$. In positiver Cahrakteristik folgt daraus aber nicht schon, daß $\widetilde{X} \to X'$ völlig inseparabel ist. Beispiel: Sei $\operatorname{char} k = 2$, $G = SL_2$, $T \subseteq G$ die Gruppe der Diagonalmatrizen, $\widetilde{X} := G/T$, $X' = G/N_G(T)$. Dann gilt $k[\widetilde{X}]^U = k[X']^U$.

8.4. Lemma. *Sei X eine G-Varietät. Dann existiert eine normale, projektive G-Varietät $\widetilde{X}$ mit $k(\widetilde{X}) = k(X) = K$ und mit einer abgeschlossenen, G-stabilen Untervarietät Y, so daß gilt:*

1. *Jede Bahn in Y ist abgeschlossen, d.h. eine Fahnenvarietät.*
2. *$K^B \subseteq \mathcal{O}_{\widetilde{X},Y}$.*

Beweis: Wir können annehmen, daß X schon projektiv ist, und ein amples G-Bündel $\mathcal{L}$ besitzt. Sei $f_1, \ldots, f_c$ eine Transzendenzbasis von K^B über k und $\sigma_0 \in H^0(X, \mathcal{L}^N)^{(B)}$, so daß $\sigma_i := f_i\sigma_0$ regulär ist. Sei M_i der von σ_i aufgespannte G-Modul und $V := (\bigoplus_{i=0}^c M_i)^\vee$. Da alle σ_i Höchstgewichtsvektoren zum selben Gewicht sind, gilt nach Lemma 1.1, daß $V' := V^{(B^-)} \cup \{0\}$ ein Vektorraum ist, so daß die kanonische Paarung

$$V' \times \langle \sigma_0, \ldots, \sigma_c \rangle \longrightarrow k$$

nicht ausgeartet ist. Also sind alle Bahnen in $Y' := G \cdot \mathbf{P}(V') \subseteq \mathbf{P}(V)$ projektiv und es gilt $f_i \in \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V),Y}$ für alle $i = 1, \ldots, c$. Aus der algebraischen Unabhängigkeit der f_i folgt, daß Y' im Abschluß X' von $\operatorname{Spec} K$ in $\mathbf{P}(V)$ liegt. Sei nun $\widetilde{X}$ die Normalisierung des Abschlusses von $\operatorname{Spec} K$ in $X \times X'$ und $\pi : \widetilde{X} \to X'$ die Projektion. Da $\widetilde{X}^B \to X'^B$ surjektiv ist, gibt es eine G-stabile Untervarietät $Y \subseteq \widetilde{X}$, die nur aus projektiven Bahnen besteht, und die surjektiv auf Y' abgebildet wird. Diese erfüllt dann beide Bedingungen.□

8.5. Korollar. *Sei X eine G-Varietät. Dann gelten folgende Äquivalenzen:*

1. $X = G \cdot X^B \iff \operatorname{rg} X = 0$;

2. $X = G \cdot X^U \iff \mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(X)$.

Beweis: 1. Die Richtung „⇒“ ist trivial. Sei also $\operatorname{rg} X = 0$. Dies ist äquivalent zu $K^U = K^B$. Wähle $\widetilde{X}$, Y wie in Lemma 8.4. Sei v eine G-invariante Bewertung mit Zentrum Y. Wegen $K^U = K^B \subseteq \mathcal{O}_{\widetilde{X},Y}$ ist v trivial (Korollar 3.6), d.h. $Y = \widetilde{X}$.
2. Aus $X = G \cdot X^U$ folgt, daß B in jeder G-Bahn eine dichte Bahn hat. Insbesondere ist $K^B = K^G$. Sei $\overline{X}$ das Faserprodukt $G \times^B X^U$. Dann operiert $T = B/U$ von rechts auf $\overline{X}$ und wegen $k(\overline{X})^B = k(\overline{X})^G \subseteq k(\overline{X})^T$ folgt $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}(\overline{X}) = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\overline{X})$ aus Satz 8.1. Die kanonische Abbildung $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\overline{X}) \to \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(X)$ ist surjektiv, und liefert damit $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(X) = \operatorname{Im} \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\overline{X}) = \operatorname{Im} \mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}(\overline{X}) \subseteq \mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}(X)$.

Sei nun $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(X)$. Nach Satz 8.2 können wir annehmen, daß es in $\operatorname{Aut}^G(X)$ einen Torus H mit $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(X) = \operatorname{Hom}(\mathcal{X}(H), \mathbb{Q})$ gibt. Weiter können wir annehmen, daß der Quotient $X' = X/H$ existiert. Dann ist $\operatorname{rg} X' = 0$ und damit jede Standgruppe von G in X' parabolisch. Sei $x \in X$ mit Bild $x' \in X'$. Wir können $Ux' = x'$ annehmen. Betrachte dann die Bahnenabbildung $\psi : U \to Ux \subseteq Hx \cong (k^\times)^r$. Wegen $k[U]^\times = k^\times$ ist ψ konstant, und damit $Ux = x$. □

9. Die Weylgruppe

Eine G-Varietät X heißt *sphärisch*, wenn B eine dichte, offene Bahn in X besitzt. Dies ist äquivalent zu $k(X)^B = k$ oder zu $c(X) = 0$. Bei sphärischen Varietäten ist jede G-invariante Bewertung zentral. Insbesondere ist $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}(X)^G = \mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}(X) \subseteq \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(X)$ ein endlich erzeugter abgeschlossener Kegel. In [Br] erzielte Brion ein viel genaueres Resultat. Wähle dazu ein Weylgruppeninvariantes Skalarprodukt auf $\mathcal{X}(T)$. Dieses induziert dann auch ein Skalarprodukt auf $\Gamma(X) \subseteq \mathcal{X}(T)$ und damit eines auf $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(X) = \operatorname{Hom}(\Gamma(X), \mathbb{Q})$. Damit ist auch der Begriff der Spiegelung erklärt.

9.1. Satz. ([Br] Cor. 3.5) *Sei* $\operatorname{char} k = 0$, *und* X *eine sphärische* G*-Varietät. Dann ist* $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}(X)$ *Fundamentalbereich einer endlichen Spiegelungsgruppe* $W_X \subseteq GL(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(X))$.

Bemerkung: Es handelt sich hier um rationale und nicht um reelle Spiegelungsgruppen. Insbesondere ist W_X die Weylgruppe eines Wurzelsystems, d.h. die Fälle H_3, H_4 usw. kommen nicht vor.

Im Beweis nützt Brion aus, daß Fundamentalbereiche endlicher Spiegelungsgruppen dadurch charakterisiert sind, daß Winkel zwischen angrenzenden Hyperseiten (die sogenannten *Keilwinkel*) nur die Werte $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ oder $\pi/6$ annehmen können. Um dies zu zeigen, kann man sich mit Satz 7.4 auf den Fall $\operatorname{rg} X = 2$ beschränken. Dann zeigt

Brion, daß es genügt, Gruppen G mit $\operatorname{rg} G \leq 4$ zu betrachten. Der Rest wird dann durch Fallunterscheidung erledigt.

Dieser Beweis hat den Nachteil, daß er völlig unklar läßt, wo die Weylgruppe W_X geometrisch herkommt. In [Kn1] habe ich auf völlig andere Weise jeder G-Varietät eine Weylgruppe zugeordnet. Sie ist im wesentlichen die Monodromiegruppe der Momentabbildung vom Kotangentialbündel T_X^* in den Dualraum der Liealgebra $\mathfrak{g}$ von G. Das Hauptresultat von [Kn3] ist dann, daß diese Weylgruppe und die Brionsche (oder genauer die unten für beliebiges X konstruierte) in natürlicher Weise übereinstimmen.

Der Höhepunkt der vorliegenden Arbeit ist es jedoch, die Brionsche Weylgruppe auf beliebige G-Varietäten zu verallgemeinern. Zunächst brauchen wir folgende Bezeichnungen:

Definition: Eine Teilmenge C eines endlich dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraumes V ist ein *simplizialer Kegel*, wenn es endlich viele, linear unabhängige Linearformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ gibt mit $C = \{v \in V \mid \alpha_i(v) \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, s\}$.

Ein *Simplex* ist die konvexe Hülle von $\dim V + 1$ Punkten, die nicht in einer affinen Hyperebene liegen.

Polytop heißt der Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen.

9.2. Satz. *Sei* $\operatorname{char} k = 0$ *und* X *eine beliebige* G*-Varietät.*

1. $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}(X) \subseteq \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(X)$ *ist Fundamentalbereich einer endlichen Spiegelungsgruppe* W_X.
2. *Sei* v_0 *eine geometrische Bewertung von* $k(X)^B$. *Dann ist* $\mathcal{V} := \mathcal{V}_{\mathbb{Q}}^{v_0}(X)^G$ *ein simplizialer Kegel. Insbesondere gibt es* $v \in \mathcal{V}$ *mit* $\mathcal{V} = \mathcal{Z} * (\mathbb{Q}_{\geq 0} v)$.

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion nach $c(X)$. Für $c(X) = 0$ siehe Satz 9.1. Sei nun $c(X) > 0$ und ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $v_0 \neq o$. Wir setzen

$$\mathcal{H}' := \{v \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(K), \mathbb{Q}) \mid v|_{K^B} = v_0\}.$$

Dies ist ein affiner Raum unter $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(K)$. Insbesondere erhält $\mathcal{H}'$ damit eine translationsinvariante Metrik. Sei $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \cap \mathcal{H}'$. Nach Korollar 6.5 ist dies ein Polytop.

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}'$ eine Seite der Kodimension zwei. Wir zeigen nun, daß der Keilwinkel von $\mathcal{V}'$ in $\mathcal{F}$ nur den Wert π/n mit $n = 2, 3, 4, 6$ annehmen kann. Wähle dazu $v \in \mathcal{F}$. Eine leichte Umformulierung von Satz 7.5 liefert: $\mathcal{Z}' := \mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}(k_v)$ ist gleich dem Kegel, der von $\mathcal{V}'$ über v aufgespannt wird. Sei $\mathcal{F}'$ der Kegel von $\mathcal{F}$ über v. Nach Konstruktion ist der Keilwinkel von $\mathcal{V}'$ in $\mathcal{F}$ gleich dem Keilwinkel von $\mathcal{Z}'$ in $\mathcal{F}'$. Wegen $c(k_v) < c(X)$

(Satz 7.3.2) ist die Induktionsannahme anwendbar, und wir erhalten die Behauptung über den Winkel.

Insbesondere hat $\mathcal{V}'$ keine stumpfen Keilwinkel. Nach [Cox] gilt damit $\mathcal{V}' = \mathcal{C} \times \mathcal{P}$, wobei $\mathcal{C}$ ein simplizialer Kegel und $\mathcal{P}$ ein Produkt von Simplizes ist. Insbesondere ist $\mathcal{P}$ beschränkt.

Wegen $\mathcal{V} = \mathbb{Q}_{>0}\mathcal{V}' \cup \mathcal{Z}$ ist $\mathcal{V}$ der Abschluß von $\mathbb{Q}_{>0}\mathcal{V}'$ und damit $\mathcal{Z} \cong \mathcal{C}$. Aus $\dim \mathcal{Z} = \dim \mathcal{V}' = \dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{P}$ folgt daraus $\dim \mathcal{P} = 0$ und damit $\mathcal{V}' = \mathcal{C} \cong \mathcal{Z}$. Daraus folgt der Satz. $\square$

Bemerkung: 1. Die Voraussetzung $\operatorname{char} k = 0$ kam durch Satz 9.1 hinein, und ich vermute, daß der Satz auch ohne sie gültig ist. Es ist nicht klar, ob man sie in Brions Beweis wirklich braucht. Durch die Verwendung von Liealgebramethoden scheint sie in meinem alternativen Beweis mit der Momentabbildung leider unumgänglich. Durch Anwendung von Satz 7.4 und Satz 8.2 würde es genügen, den Satz in beliebiger Charakteristik in folgender Situation zu beweisen: $X = G/H$ ist homogen, $c(X) = 0$, $\operatorname{rg} X = 2$.
2. Die Weylgruppe W_X und der Bewertungskegel $\mathcal{Z}$ bestimmen einander eindeutig: Einerseits ist W_X die Gruppe, die von den Spiegelungen an den Hyperseiten von $\mathcal{Z}$ erzeugt wird. Andererseits ist $\mathcal{Z}$ nach Korollar 5.2.4 die antidominante Weylkammer von W_X.

Definition: Sei $\mathcal{V}_\Lambda^{\mathrm{geo}}(K)^G$ die Menge aller G-invarianten Λ-Bewertungen v, deren Einschränkung v^B geometrisch ist.

9.3. Satz. *Sei $\operatorname{char} k = 0$ und X eine G-Varietät. Sei weiter Λ eine teilbare Gruppe. Dann gibt es eine Operation von W_X auf $\mathcal{V}_\Lambda^{\mathrm{geo}}(K^U)^T$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Einschränkungsabbildung $\mathcal{V}_\Lambda^{\mathrm{geo}}(K^U)^T \to \mathcal{V}_\Lambda^{\mathrm{geo}}(K^B)$ ist W_X-invariant.*
2. *$w(v' * v'') = wv' * wv''$ für alle $w \in W_X$, $v' \in \mathcal{H}_\Lambda(K)$ und $v'' \in \mathcal{V}_\Lambda^{\mathrm{geo}}(K^U)^T$.*
3. *$\mathcal{V}_\Lambda^{\mathrm{geo}}(K)^G$ ist ein Fundamentalbereich für diese W_X-Operation, d.h. jede Bahn hat mit dieser Menge genau ein Element gemeinsam.*

Beweis: Die Operation von W_X auf $\mathcal{H}_\mathbb{Q}(K)$ induziert eine auf $\Gamma(K) \otimes \mathbb{Q} \cong \operatorname{Hom}(\mathcal{H}_\mathbb{Q}(K), \mathbb{Q})$. Sei v_0 eine geometrische Bewertung von K^B. Nach Satz 9.2 gibt es eine Bewertung v mit $v^B = v_0$, so daß $\mathcal{V}_\mathbb{Q}^{v_0}(K)^G$ als konvexer Kegel von $\mathcal{Z}_\mathbb{Q}(K)$ und v aufgespannt wird. Dieses $v : \mathcal{Q}_{v_0}(K) \to \mathbb{Q}$ spaltet die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Lambda(v_0) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}_{v_0}(K) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \Gamma(K) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0,$$

und liefert damit eine Operation auf $\mathcal{Q}_{v_0}(K) \otimes \mathbb{Q}$, indem wir W_X auf $\Lambda(v_0) \otimes \mathbb{Q}$ trivial operieren lassen. Da Λ nach Voraussetzung teilbar ist, induziert dies eine W_X-Operation auf $\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K^U)^T \cong \{\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Q}_{v_0}(K), \Lambda) \mid \varphi(\Lambda(v_0)^+) \geq 0\}$.

Nach Konstruktion sind die Behauptungen 1 und 2 erfüllt. Wir zeigen nun 3. Die W_X-Operation auf $\mathcal{H}_\mathbb{Q}(K)$ wird durch ein Wurzelsystem $\Delta \in \Gamma(K) \otimes \mathbb{Q}$ induziert, und es gibt ein System $\Sigma \subset \Delta$ einfacher Wurzeln, das denselben Kegel aufspannt wie $\mathcal{C}(o)$. Wir lassen nun $\overline{W} := W_X \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf $\mathcal{Q}_{v_0}(K)$ operieren, indem der zweite Faktor auf $\Gamma(K)\otimes\mathbb{Q}$ trivial und auf $\Lambda(v_0) \otimes \mathbb{Q}$ mit ± 1 operiert. Sei weiterhin $\lambda \in \Lambda(v_0)^+$. Dann ist $\overline{W}$ eine Spiegelungsgruppe, $\overline{\Sigma} := \Sigma \cup \{\lambda\}$ ist ein System einfacher Wurzeln, und es gilt

$$\mathcal{V}_\Lambda^{v_0}(K)^G = \{v : \mathcal{Q}_{v_0}(K) \to \Lambda \mid v(\overline{\Sigma}) \geq 0\}.$$

Die Behauptung folgt nun aus dem folgenden Lemma. □

9.4. Lemma. *Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektoraum und $\Delta \subseteq V$ ein Wurzelsystem mit Weylgruppe W und System einfacher Wurzeln Σ. Dann gilt für jeden total geordneten $\mathbb{Q}$-Vektorraum Λ und jeden Homomorphismus $\varphi : V \to \Lambda$:*

1. *Es gibt ein $w \in W$ mit $w\varphi(\Sigma) \geq 0$.*
2. *Aus $\varphi(\Sigma) \geq 0$ und $w\varphi(\Sigma) \geq 0$ folgt $\varphi = w\varphi$.*

Beweis: O.B.d.A. können wir annehmen, daß $d := \operatorname{rg}\Lambda$ (= Anzahl der echten isolierten Untergruppen) endlich ist. Wir führen dann den Beweis über Induktion nach d. Für $d = 1$ ist Λ eine Untergruppe von $\mathbb{R}$, und das Lemma ist eine wohlbekannte Tatsache aus der Theorie der Wurzelsysteme.

Sei nun $d > 1$ und $\Lambda_0 \subsetneqq \Lambda$ die maximale isolierte Untergruppe und $\overline{\Lambda} := \Lambda/\Lambda_0$. Dann ist $\operatorname{rg}\overline{\Lambda} = 1$. Sei $\overline{\varphi} : V \to \overline{\Lambda}$ der induzierte Homomorphismus. Ohne Einschränkung können wir dann $\overline{\varphi}(\Sigma) \geq 0$ annehmen. Sei $\Sigma_0 := \{\alpha \in \Sigma \mid \overline{\varphi}(\alpha) = 0\}$. Dann ist $\varphi(\Sigma \setminus \Sigma_0) > 0$ und die Behauptung folgt nun durch Induktion, und aus der bekannten Tatsache, daß die Standgruppe von $\overline{\varphi}$ von den Spiegelungen an den Elementen von Σ_0 erzeugt wird. □

Bemerkung: Schon das Beispiel $X = SL_2/\{1\}$ zeigt, daß die W_X-Operation nicht von einer Wirkung auf K^U oder $K^{(B)}$ induziert wird.

Aus dem Satz folgt, daß sich folgende drei Daten gegenseitig bestimmen, d.h. man kann eins aus dem anderen ausrechnen:

— $\mathcal{V}_\mathbb{Q}^{\text{geo}}(K)^G$;

— Die Operation von W_X auf $\mathcal{V}_\mathbb{Q}^{\text{geo}}(K^U)^T$;

— $\mathcal{Z}_\mathbb{Q}(X)$ zusammen mit der Fixpunktmenge von W_X in $\mathcal{V}_\mathbb{Q}^{\text{geo}}(K^U)^T$.

Ein interessantes Problem ist es, obige Operation a priori, d.h. ohne Verwendung G-invarianter Bewertungen, zu konstruieren. Ich hoffe, in einer späteren Arbeit darauf zurückzukommen.

Als Korollar von Satz 9.2.2 und Satz 7.5 erhält man:

9.5. Korollar. *Sei* char $k = 0$ *und* X *eine* G*-Varietät. Dann gibt es zu jeder geometrischen* $\mathbb{Q}$*-Bewertung* v_0 *von* K^B *eine invariante* $\mathbb{Q}$*-Bewertung* v *von* K *mit:*

1. $v^B = v_0$*;*

2. $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}^0_{\mathbb{Q}}(k_v) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}^0_{\mathbb{Q}}(K)$.

Dieses v *ist modulo* $\mathcal{Z}^0_{\mathbb{Q}}(K)$ *eindeutig bestimmt. Weiter ist* $\mathcal{V}^{v_0}_{\mathbb{Q}}(K)^G$ *der von* $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}(K)$ *und* v *aufgespannte konvexe Kegel.*

Dieses Korollar hat durchaus einen praktischen Nutzen, um $\mathcal{V}^{v_0}_{\mathbb{Q}}(K)^G$ zu bestimmen, da es zu gegebenem v_0 häufig möglich ist, eine Bewertung v mit den obigen, leicht zu verifizierenden Eigenschaften zu erraten. Mit Hilfe von Satz 8.2 kann man sich auf den Fall $\mathcal{Z}^0_{\mathbb{Q}}(K) = 0$ beschränken. Dann ist v wirklich *kanonisch* v_0 zugeordnet.

10. Literatur

[Br] Brion, M.: Vers une généralisation des espaces symétriques. *J. Algebra* **134** (1990), 115–143

[BLV] Brion, M.; Luna, D.; Vust, Th.: Espaces homogènes sphériques. *Invent. Math.* **84** (1986), 617–632

[BP] Brion, P.; Pauer, F.: Valuation des espaces homogènes sphériques. *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), 265–285

[Cox] Coxeter, H. S. M.: Discrete groups generated by reflections. *Ann. Math.* **35** (1934), 588–621

[CP] De Concini, C.; Procesi, C.: Complete symmetric varieties. In: *Invariant theory, Proceedings, Montecatini.* (F. Gherardelli ed.) Lect. Notes Math. **996**, Heidelberg-Berlin-New York: Springer-Verlag 1983, 1–44

[De] Demazure, M.: Sous-groups algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **3** (1970), 507–588

[Gr1] Grosshans, F. D.: The invariants of unipotent radicals of parabolic subgroups. *Invent. math.* **73** (1983), 1–9

[Gr2] Grosshans, F. D.: Contractions of the actions of reductive algebraic groups in arbitrary characteristic. *Invent. Math.* **107** (1992), 127–133

[EGA] Dieudonné, J.; Grothendieck, A.: Eléments de géométrie algébrique IV. *Publ. Math. IHES* **28** (1966),

[Ha] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. (Graduate Texts in Math. Vol. 52) Heidelberg-Berlin-New York: Springer-Verlag 1977

[Hu] Humphreys, J. E.: Linear algebraic groups. (Graduate Texts in Math. Vol. 21) Heidelberg-Berlin-New York: Springer-Verlag 1981

[KKMS] Kempf, G.; Knudson, F.; Mumford, D.; Saint-Donat, B.: Toroidal embeddings, I. Lect. Notes Math. **339**, Heidelberg-Berlin-New York: Springer-Verlag 1973

[Kn1] Knop, F.: Weylgruppe und Momentabbildung. *Invent. Math.* **99** (1990), 1–23

[Kn2] Knop, F.: The Luna-Vust theory of spherical embeddings. (Proceedings of the Hyderabad conference on algebraic groups) Madras: Manoj Prakashan 1991

[Kn3] Knop, F.: Weylgruppe und äquivariante Einbettungen. *Preprint* (1990)

[KKV] Knop, F.; Kraft, H.; Vust, Th.: The Picard group of a G-variety. In: *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie.* (H. Kraft, P. Slodowy, T. Springer eds.) DMV Semin. **13**, Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser 1989, 77–88

[KKLV] Knop, F.; Kraft, H.; Luna, D.; Vust, Th.: Local properties of algebraic group actions. In: *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie.* (H. Kraft, P. Slodowy, T. Springer eds.) DMV Semin. **13**, Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser 1989, 63–76

[LV] Luna, D.; Vust, Th.: Plongements d'espaces homogènes. *Comment. Math. Helv.* **58** (1983), 186–245

[MO] Miyake, K.; Oda, T.: Almost homogeneous algebraic varieties under algebraic torus actions. In: *Manifolds-Tokyo, 1973.* (A. Hattori ed.) Tokyo: Univ. of Tokyo Press 1975, 373–381

[Pan] Panyushev, D.: Complexity and rank of homogeneous spaces. *Geom. Dedicata* **34** (1990), 249–269

[Pau] Pauer, F.: "Caracterisation valuative" d'une classe de sous-groupes d'un groupe algébrique. *C. R. 109^{e} Congrès nat. Soc. sav.* **3** (1984), 159–166

[Sa] Satake, I.: On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces. *Ann. Math.* **71** (1960), 77–110

[Sl] Slodowy, P.: Simple singularities and simple algebraic groups. Lect. Notes Math. **815**, Heidelberg-Berlin-New York: Springer-Verlag 1980

[Su] Sumihiro, H.: Equivariant completion. *J. Math. Kyoto Univ.* **14** (1974), 1–28

[ZS] Zariski, O.; Samuel, P.: Commutative Algebra, Vol. II. Princeton: Van Nostrand 1960