

# Nichtlinearisierbare Operationen halbeinfacher Gruppen auf affinen Räumen

Friedrich Knop\*

Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel

Es bestand längere Zeit das Problem, ob jede algebraische Operation einer komplexen reductiven Gruppe  $G$  auf einem affinen Raum  $\mathbb{C}^N$  linearisierbar ist (siehe etwa [K] und die dort angegebene Literatur). In [S] gab Schwarz erste Gegenbeispiele für die orthogonale Gruppe  $O_2(\mathbb{C})$  sowie für  $SL_2(\mathbb{C})$  an. Die Konstruktion beruht auf den von Kraft und Schwarz in [KS] entwickelten Methoden, und wird dort auch angewendet, um Gegenbeispiele für alle einfachen Gruppen außer  $F_4$  und  $E_6$  zu konstruieren.

In der vorliegenden Arbeit konstruieren wir für jede nichtkommutative, zusammenhängende, reductive Gruppe, insbesondere also für jede halbeinfache Gruppe, eine effektive nichtlinearisierbare Operation auf einem affinen Raum. Dazu führen wir den allgemeinen Fall auf den Fall  $G = SL_2(\mathbb{C})$  aus [S] zurück. Die Klassifikation der halbeinfachen Gruppen wird nicht benutzt.

Weitere Konstruktionen für gewisse einfache oder endliche Gruppen werden in [MP1], [MP2] und [MMP] angegeben.

Sei  $G$  im folgenden eine nichtkommutative, zusammenhängende, reductive Gruppe. Wähle einen maximalen Torus  $T \subset G$  mit Liealgebra  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ . Sei  $\Sigma \subseteq \mathfrak{t}^*$  ein System einfacher Wurzeln, und wähle  $\alpha \in \Sigma$  beliebig, aber fest. Sei dann  $L$  die von  $T$  und den Wurzeluntergruppen  $U_\alpha, U_{-\alpha}$  erzeugte Leviuntergruppe. Mit  $L'$  bezeichnen wir ihre Kommutatoruntergruppe und mit  $Z$  ihr Zentrum. Dann ist  $L = ZL'$  und  $L' \cong SL_2(\mathbb{C})$  oder  $\cong SO_3(\mathbb{C})$ . Wähle ein  $\xi_0 \in \mathfrak{t}$ , dessen Zentralisator genau  $L$  ist. Mit  $\mathfrak{a}$  bezeichnen wir den dreidimensionalen affinen Teilraum  $\xi_0 + \text{Lie } L' \subseteq \mathfrak{g}$ . Als  $L'$ -Varietät ist er isomorph zur adjungierten Darstellung.

Sei  $\chi \in \mathcal{X}(T)$  ein dominantes Gewicht und  $M_\chi$  (bzw.  $M'_\chi$ ) der zugehörige irreduzible  $G$ -Modul (bzw.  $L$ -Modul). Die Einschränkung von  $\chi$  auf  $Z$  sei  $\chi'$ .

Für eine  $G$ -Varietät  $X$ , ein  $x \in X^G$  und eine  $G$ -Darstellung  $M$  sei  $\text{VB}_G(X, x, M)$  die Menge der Isomorphieklassen von  $G$ -Vektorbündeln auf  $X$ , deren Faser über  $x$  isomorph zu  $M$  ist. Das trivial Vektorbündel  $X \times M$  werde mit  $\Theta_X(M)$  bezeichnet.

Sei  $\mathcal{V}'$  ein  $L$ -Vektorbündel auf  $\mathfrak{a}$ . Dann operiert  $Z$  trivial auf der Basis und linear auf jeder Faser. Also bildet die Vereinigung der  $\chi'$ -Eigenräume der Fasern ein Unterbündel

---

\* Unterstützt durch den Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

## Nichtlinearisierbare Operationen auf affinen Räumen

$\mathcal{V}'_{\chi'}$ . Betrachte  $M_\chi$  als  $L$ -Modul. Dann sieht man leicht, daß der  $\chi'$ -Eigenraum von  $Z$  isomorph zu  $M_{\chi'}$  ist. Dies liefert damit folgende Abbildung:

$$\Phi_\chi : \text{VB}_G(\mathfrak{g}, 0, M_\chi) \longrightarrow \text{VB}_L(\mathfrak{a}, \xi_0, M'_\chi) : \mathcal{V} \mapsto (\mathcal{V}|_{\mathfrak{a}})_{\chi'}$$

Das Hauptresultat ist dann:

**Satz.** *Für ein reguläres, dominantes Gewicht  $\chi$  ist  $\Phi_\chi$  surjektiv.*

Daraus folgt:

**Korollar.** *Es gibt nichttriviale  $G$ -Vektorbündel über  $\mathfrak{g}$ .*

*Beweis:* Nach [S] ist  $|\text{VB}_L(\mathfrak{a}, \xi_0, M'_\chi)| > 1$  für  $\langle \chi, \alpha \rangle \geq 3$ . □

**Korollar.** *Es gibt eine effektive, nichtlinearisierbare Operation von  $G$  auf einem affinen Raum.*

*Beweis:* Nach dem Bass-Haboush-Trick [BH] genügt es, ein Vektorbündel  $\mathcal{V}$  über  $\mathfrak{g}$  zu finden, für das  $\mathcal{V} \oplus \Theta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  nichttrivial ist. Wegen [S] können wir uns auf den Fall  $\text{rg } G \geq 2$  beschränken. Wähle zunächst irgendeine treue Darstellung  $E$  von  $G$  und einen regulären dominanten Charakter  $\chi$  mit:

- i) Es gibt  $\mathcal{V}^0 \in \text{VB}_G(\mathfrak{g}, 0, M_\chi)$ , so daß  $\Phi_\chi(\mathcal{V}^0)$  nichttrivial ist.
- ii)  $\chi'$  ist kein Gewicht von  $Z$  in  $E \oplus \mathfrak{g}$ .

Setze dann  $\mathcal{V} := \mathcal{V}^0 \oplus \Theta_{\mathfrak{g}}(E)$ . Wegen

$$((\mathcal{V} \oplus \Theta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}))|_{\mathfrak{a}})_{\chi'} = (\mathcal{V}^0|_{\mathfrak{a}} \oplus \Theta_{\mathfrak{a}}(E \oplus \mathfrak{g}))_{\chi'} = \Phi_\chi(\mathcal{V}^0)$$

leistet  $\mathcal{V}$  das Gewünschte. □

*Beweis des Satzes:* Sei  $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$  die Menge der regulär halbeinfachen Elemente. Ihr Komplement besteht genau aus den Punkten, in denen die Diskriminante  $\Delta \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}]$  verschwindet. Für eine endliche Teilmenge  $S \subset \mathbb{C}$  sei  $\mathfrak{g}_S := \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \Delta(\xi) \notin S\}$ . Analog setzen wir  $\mathfrak{t}_0 := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_0$  und  $\mathfrak{t}_S := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_S$ . Sei  $W$  die Weylgruppe von  $G$ . Weiter sei  $\delta \in \mathbb{C}[\mathfrak{t}]$  das Produkt der positiven Wurzeln. Es gilt  $\Delta|_{\mathfrak{t}} = \delta^2$ .

Wir konstruieren nun ein Vektorbündel  $\mathcal{V}$ , indem wir triviale Vektorbündel über  $\mathfrak{g}_0$  und  $\mathfrak{g}_S$  für geeignetes  $S \subset \mathbb{C}^*$  zusammenkleben. Wir haben  $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_S = \mathfrak{g}_{S_0}$  mit  $S_0 = S \cup \{0\}$ . Die Verklebungsabbildung ist ein  $G$ -äquivarianter Morphismus

$$\varphi : \mathfrak{g}_{S_0} \longrightarrow GL(M_\chi),$$

## Nichtlinearisierbare Operationen auf affinen Räumen

wobei  $G$  auf der rechten Seite durch Konjugation operiert. Wegen  $\mathfrak{g}_{S_0} \subseteq \mathfrak{g}_0$  gilt  $\mathfrak{g}_{S_0} = G \times^{N(T)} \mathfrak{t}_{S_0}$ . Also ist  $\varphi$  eindeutig durch die  $N(T)$ -äquivariante Einschränkung

$$\varphi' : \mathfrak{t}_{S_0} \longrightarrow GL(M_\chi).$$

bestimmt. Sei

$$M_\chi = \bigoplus_{\eta \in \mathcal{X}(T)} M(\eta)$$

die Zerlegung von  $M_\chi$  in Gewichtsräume. Das Bild von  $\varphi'$  liegt im Zentralisator von  $T$  in  $GL(M_\chi)$ , und dieser ist gleich  $\prod_{\eta \in \mathcal{X}(T)} GL(M(\eta))$ . Also ist  $\varphi'$  gegeben durch eine Familie von Morphismen

$$\varphi_\eta : \mathfrak{t}_{S_0} \longrightarrow GL(M(\eta))$$

mit

$$\varphi_{w\eta}(\xi) = \bar{w} \circ \varphi_\eta(w^{-1}\xi) \circ \bar{w}^{-1} \quad \text{für alle } w \in W.$$

Dabei ist  $\bar{w} \in N(T)$  ein beliebiger Repräsentant von  $w$  und bezeichnet gleichzeitig den induzierten Homomorphismus  $M(\eta) \rightarrow M(w\eta)$ . Wir interessieren uns im folgenden nur für solche  $\varphi$ , für die  $\varphi_\eta \equiv 1$  ist, außer, wenn  $\eta = w(\chi - n\alpha)$  mit  $w \in W$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist. Für solche  $\eta$  ist  $M(\eta)$  eindimensional und daher  $\varphi_\eta : \mathfrak{t}_{S_0} \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Da  $\chi$  nach Voraussetzung regulär ist, ist die Standgruppe von  $\chi - n\alpha$  in  $W$  eine Untergruppe von  $W_\alpha := \{1, s_\alpha\}$ , wobei  $s_\alpha$  die Spiegelung an  $\alpha$  ist. Also wird  $\varphi$  gegeben durch eine Familie von Einheiten

$$\varphi_n := \varphi_{\chi - n\alpha} : \mathfrak{t}_{S_0} \longrightarrow \mathbb{C}^* \quad (n = 0, \dots, n_0 := \langle \chi, \alpha \rangle),$$

die nur der Einschränkung

$$\varphi_n(s_\alpha \xi) = \varphi_{n_0 - n}(\xi) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

unterliegen. Wir können also  $\varphi_n$  für  $n < n_0/2$  frei wählen, während  $\varphi_n \circ s_\alpha = \varphi_n$  für  $n = n_0/2$  gelten muß. Weiterhin beschränken wir uns auf solche Funktionen, die sich als rationale Funktion in  $\delta$  ausdrücken lassen:  $\varphi_n(\xi) = p_n(\delta(\xi))$ . Die  $p_n$  sind für  $0 \leq n < n_0/2$  beliebig. Für  $n = n_0/2$  gilt  $p_n(-t) = p_n(t)$ . Sind umgekehrt solche Funktionen gegeben, so definieren sie einen Morphismus  $\varphi_{p_\bullet} : \mathfrak{g}_{S_0} \longrightarrow GL(M_\chi)$ .

Seien

$$\varphi_0 : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow GL(M_\chi), \quad \varphi_S : \mathfrak{g}_S \longrightarrow GL(M_\chi)$$

$G$ -Morphismen. Dann liefern  $\varphi$  und  $\varphi_0 \cdot \varphi \cdot \varphi_S$  offenbar isomorphe Vektorbündel. Für  $0 \leq n \leq n_0/2$  sei  $a_n \in \mathbb{C}^*$  und  $\nu_n \in \mathbb{Z}$  (mit  $\nu_n$  gerade für  $n = n_0/2$ ). Dann definieren die Funktionen  $a_n \delta^{\nu_n}$  einen  $G$ -Morphismus  $\varphi_0 : \mathfrak{g}_0 \rightarrow GL(M_\chi)$ . Also führen die Funktionen  $p_n$  und  $(a_n \delta^{\nu_n} p_n)$  zu isomorphen Vektorbündeln, d. h. man kann die  $p_n$  so normieren, daß sie bei Null definiert und dort gleich eins sind. Wir betrachten ab jetzt nur noch solcherart normierte Funktionen.

Im folgenden Lemma nützen wir  $\varphi_S$  aus. Sei  $v_0$  die Bewertung des Körpers  $\mathbb{C}(\delta)$  in  $\delta = 0$ .

**Lemma.** *Es gibt ein  $N \in \mathbb{N}$  mit folgender Eigenschaft: Zwei Familien  $p_n(\delta)$ ,  $\bar{p}_n(\delta)$  normierter, rationaler Funktionen mit*

$$v_0(p_n - \bar{p}_n) \geq N \quad \text{für alle } n$$

*definieren isomorphe Vektorbündel.*

*Beweis des Lemmas:* Sei  $q_n := p_n/\bar{p}_n$ . Das Problem ist, ob sich  $\varphi_{q_\bullet}$  zu einem Morphismus  $\varphi_S : \mathfrak{g}_S \rightarrow GL(M_\chi)$  fortsetzen läßt. Entwickle dazu  $q_n(\delta) = 1 + a_{n1}\delta + a_{n2}\delta^2 + \dots$  in eine Potenzreihe. Dann hat die induzierte Abbildung  $\varphi_{q_\bullet} : \mathfrak{g}_{S_0} \rightarrow GL(M_\chi) \subset \text{End}(M_\chi)$  eine Reihenentwicklung der Form

$$\sum_{\nu \gg -\infty} f_\nu(\xi, a_{ni}) \Delta^\nu,$$

wobei jeder Koeffizient  $f_\nu$  polynomial von  $\xi \in \mathfrak{g}$  und endlich vielen  $a_{ni}$  abhängt. Wenn alle  $a_{ni} = 0$  sind, ist  $\varphi_{q_\bullet} \equiv \text{id}_{M_\chi}$  und damit fortsetzbar. Also ist  $\varphi_{q_\bullet}$  auch fortsetzbar, wenn nur die endlich vielen  $a_{ni}$ , die in einem  $f_\nu$  mit  $\nu \leq 0$  vorkommen, gleich null sind.  $\square$

Im Fall  $\text{rg } G = 1$  liefert unsere Konstruktion *alle*  $G$ -Vektorbündel  $\mathcal{V}$  über  $\mathfrak{g}$  ([S]). Dies folgt aus der Tatsache, daß es dann immer eine endliche Menge  $S \subset \mathbb{C}^*$  gibt, so daß  $\mathcal{V}$  über  $\mathfrak{g}_0$  und  $\mathfrak{g}_S$  trivial ist ([KS] Chap. VII: Prop. 1.1 (3) & Thm. 2.6 (1)). Insbesondere wird jedes  $\mathcal{V}' \in \text{VB}_L(\mathfrak{a}, \xi_0, M'_\chi)$  definiert durch geeignete normierte rationale Funktionen  $q_n(\lambda)$  auf  $\mathfrak{s} := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{a} = \{\xi_0 + \lambda h_\alpha \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ . Dabei ist  $h_\alpha \in \mathfrak{t} \cap \text{Lie } L'$  mit  $\alpha(h_\alpha) = 1$ .

Das Polynom  $\delta$  verschwindet genau in den Spiegelungsebenen von  $\mathfrak{t}$ , und zwar mit Multiplizität eins. Nach Wahl liegt  $\xi_0$  auf genau einer solchen Spiegelungsebene, nämlich der zu  $s_\alpha$ , und  $\mathfrak{s}$  schneidet diese dort transversal. Es folgt, daß  $\delta_0 := \delta|_{\mathfrak{s}}$  eine einfache Nullstelle in  $\xi_0$  hat, d. h.  $v_0$ -adisch liegt  $\mathbb{C}(\delta_0)$  dicht in  $\mathbb{C}(\mathfrak{s}) = \mathbb{C}(\lambda)$ . Daher gibt es zu den Funktionen  $q_n$ , die  $\mathcal{V}'$  definieren, normierte rationale Funktionen  $p_n$  mit  $v_0(p_n(\delta_0) - q_n) \geq N$ . Dabei ist  $N \in \mathbb{N}$  wie im Lemma, aber auf  $L'$  und nicht auf  $G$  angewendet. Durch  $p_n(\delta)$

## Nichtlinearisierbare Operationen auf affinen Räumen

wird dann ein Vektorbündel  $\mathcal{V}$  auf  $\mathfrak{g}$  definiert. Das Bündel  $\Phi_\chi(\mathcal{V})$  wird wiederum geliefert durch  $p_n(\delta)|_{\mathfrak{s}} = p_n(\delta_0)$ . Also ist  $\Phi_\chi(\mathcal{V}) \cong \mathcal{V}'$ .  $\square$

Diese Arbeit entstand im Frühjahr 1989 während eines Aufenthaltes am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn. Ich danke dem Institut für die Unterstützung und Gastfreundschaft.

### Literatur:

- [BH] Bass, H.; Haboush, W.: Some equivariant  $K$ -theory of affine algebraic group actions. *Comm. Alg.* **15**, 181–217 (1987)
- [K] Kraft, H.: Algebraic automorphisms of affine space. In: H. Kraft, T. Petrie, G. Schwarz (eds.) *Topological methods in algebraic transformation groups*. (Progress Math., vol. 80, pp. 81–105) Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser 1989
- [KS] Kraft, H.; Schwarz, G.: Reductive group actions with one dimensional quotient. Preprint (1990)
- [MP1] Masuda, M.; Petrie, T.: Equivariant Serre conjecture and algebraic actions on  $\mathbb{C}^n$ . Preprint (1990)
- [MP2] Masuda, M.; Petrie, T.: Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups, I. Preprint (1990)
- [MMP] Masuda, M.; Moser-Jauslin, L.; Petrie, T.: Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups, II. Preprint (1990)
- [S] Schwarz, G.: Exotic algebraic group actions. *C. R. Acad. Sci. Paris* **309**, 89–94 (1989)