

Über Hilberts vierzehntes Problem für Varietäten mit Kompliziertheit eins

FRIEDRICH KNOP*

Mathematisches Institut der Universität Basel, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel
knop@urz.unibas.ch

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert. Sei G eine reductive Gruppe, $B \subseteq G$ eine Boreluntergruppe, $U \subseteq B$ die maximal unipotente Untergruppe und $T := B/U$. Für eine G -Varietät X haben Luna und Vust ([LV]) die *Kompliziertheit* als

$$c(X) = \text{Tr.grad}_k k(X)^B = \min_{x \in X} \text{kodim}_X Bx$$

definiert. In zeigte sich in [LV], daß $c(X)$ tatsächlich ein Maß für die Schwierigkeit ist, die äquivarianten Einbettungen von X zu klassifizieren. Der folgende Satz ist eine weitere Rechtfertigung für den Begriff Kompliziertheit:

Satz. *Sei X eine normale, unirationale G -Varietät mit $c(X) \leq 1$. Dann ist die Algebra $k[X]$ der globalen Funktionen endlich erzeugt.*

Beweis: Sei $K := k(X)$ und $R := k[X]$. Auf R operiert G lokal endlich. Es genügt daher zu zeigen, daß die Algebra R^U der U -invarianten Funktionen endlich erzeugt ist. Dies sieht man für $\text{char } k = 0$ folgendermaßen: Sei $S \subseteq R^U$ ein endliches Erzeugendensystem, $M \subseteq R$ der von S erzeugte G -Modul und $R' \subseteq R$ die von M erzeugte Algebra. Wegen der linearen Reduktivität von G hat R' in R ein G -stabiles Komplement C . Nach Konstruktion ist $R^U \subseteq R'$. Daraus folgt $C^U = 0$ und damit $C = 0$ und $R' = R$, d.h. R wird von dem endlichdimensionalen Raum M erzeugt. In positiver Charakteristik ist die Argumentation schwieriger (siehe [Gr2] Thm. 9).

Für einen B -Modul V bezeichne $V^{(B)}$ die Menge der B -Eigenvektoren, und für $v \in V^{(B)}$ sei $\chi_v \in \mathcal{X}(B) = \mathcal{X}(T)$ der zugehörige Charakter. Sei

$$\Gamma := \{\chi_f \mid f \in K^{(B)}\}$$

* Unterstützt durch den Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

die Menge aller Charaktere von rationalen Eigenfunktionen. Dies ist eine Untergruppe von $\mathcal{X}(T)$ und damit eine endlich erzeugte, freie abelsche Gruppe. Weiterhin besteht die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow (K^B)^* \longrightarrow K^{(B)} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0.$$

Da Γ ist, gibt es einen Schnitt $\Gamma \rightarrow K^{(B)} : \chi \mapsto f_\chi$, d.h. es gilt $\chi_{f_\chi} = \chi$ und $f_{\chi+\eta} = f_\chi f_\eta$. Damit ist

$$(K^B)^* \times \Gamma \rightarrow K^{(B)} : (g, \chi) \mapsto g f_\chi$$

ein Isomorphismus und wir werden beide Gruppen ab jetzt identifizieren.

Jeder Primdivisor D von X induziert eine diskrete Bewertung v_D von K . Für $\chi \in \Gamma$ sei $v_D(\chi) := v_D(f_\chi)$. Dies ist eine Linearform auf Γ .

Wir behandeln zuerst den Fall $c(X) = 0$. Dann ist $K^B = k$ und X enthält eine offene B -Bahn Bx_0 . Sei \mathcal{D} die Menge aller Primdivisoren von X , die im Komplement $X \setminus Bx_0$ liegen. Wir setzen

$$\mathcal{M} := \{\chi \in \Gamma \mid v_D(\chi) \geq 0 \text{ für alle } D \in \mathcal{D}\}.$$

Da \mathcal{D} endlich ist, wird \mathcal{M} durch endlich viele lineare Ungleichungen definiert, und ist damit ein endlich erzeugtes Monoid (Gordansches Lemma). Nach Konstruktion ist $R^{(B)} = R \cap K^{(B)} = k^* \times \mathcal{M}$. Da R^U linear von $R^{(B)}$ aufgespannt wird, ist R^U endlich erzeugt.

Sei ab jetzt $c(X) = 1$. Der Körper K^B ist nach Voraussetzung unirational mit Transzendenzgrad eins. Nach dem Satz von Lüroth wird K^B von einer nichtkonstanten rationalen Funktion $t \in K^B$ erzeugt. Wähle eine nichtleere, B -stabile, offene Teilmenge $X_0 \subseteq X$ mit folgenden Eigenschaften:

- a) Die rationale Funktion t ist regulär auf X_0 . Sei $S := t(X_0) \subseteq \mathbf{A}^1$ ihr Bild.
- b) Die Fasern von $t : X_0 \rightarrow S$ sind genau die Bahnen von B in X_0 . Insbesondere gilt $k[X_0]^B = k[S]$.

Wähle Erzeuger χ_1, \dots, χ_r von Γ . Indem wir aus X_0 alle Null- und Polstellen von $f_{\chi_1}, \dots, f_{\chi_r}$ entfernen, haben wir:

- c) Für alle $\chi \in \Gamma$ sind f_χ und f_χ^{-1} regulär auf X_0 .

Sei nun \mathcal{D} die endliche Menge aller Primdivisoren von X , die in $X \setminus X_0$ liegen. Dann liefern die Eigenschaften b) und c) von X_0 :

$$R^{(B)} = \{h f_\chi \in K^{(B)} \mid h \in k[S] \text{ und } v_D(h f_\chi) \geq 0 \text{ für alle } D \in \mathcal{D}\}.$$

Für $D \in \mathcal{D}$ ist die Einschränkung $v_D|_{K^B}$ eine diskrete Bewertung von $k(t)$. Diese ist entweder trivial oder gleich $n_D v_{x_D}$ mit $n_D \in \mathbb{N}$ und einem Punkt $x_D \in \mathbf{P}^1$. Im trivialen Fall setzen wir $n_D = 0$, und x_D sei irgendein beliebiger fester Punkt. Damit gilt für alle $D \in \mathcal{D}$:

$$v_D(hf_\chi) = n_D v_{x_D}(h) + v_D(\chi).$$

Durch weiteres Verkleinern von X_0 (und Vergrößern von \mathcal{D}) können wir erreichen, daß keiner der Punkte x_D in S liegt.

Wir identifizieren nun $k(t) = k(\mathbf{P}^1)$ mit dem Körper $k(x/y)$ der rationalen Funktionen vom Grad null in $k(x, y) = k(\mathbf{A}^2)$. Sei \tilde{S} das Urbild von S in \mathbf{A}^2 und $l_D \subset \mathbf{A}^2$ die Gerade, die $x_D \in \mathbf{P}^1$ entspricht. Weiter sei $k[\tilde{S}]_{\text{hom}}$ die Menge aller homogenen Funktionen auf \tilde{S} . Damit definieren wir $\tilde{R} \subseteq k(x, y) \otimes_k k[\Gamma]$ als die Unter algebra, die als Vektorraum von dem Monoid

$$\{h \otimes \chi \mid h \in k[\tilde{S}]_{\text{hom}}, \chi \in \Gamma \text{ und } n_D v_{l_D}(h) + v_D(\chi) \geq 0 \text{ für alle } D \in \mathcal{D}\}.$$

erzeugt wird. Dann ist \tilde{R} eine \mathbb{Z} -graduier te Algebra, und R^U ist isomorph zur Unter algebra der Elemente vom Grad null. Nun ist eine \mathbb{Z} -Graduierung nichts weiter als eine algebraische k^* -Operation: $t \in k^*$ operiere auf der n -ten Graduierungskomponente durch Multiplikation mit t^n . Also ist R^U der Invariantenring von \tilde{R} unter der reduktiven Gruppe k^* . Es genügt also zu zeigen, daß \tilde{R} endlich erzeugt ist.

Das Komplement von \tilde{S} in \mathbf{A}^2 ist die Vereinigung von endlich vielen Geraden l_1, \dots, l_r . Wähle zu jeder Geraden l_i eine lineare Funktion $t_i \in kx \oplus ky$, die l_i als Nullstellenmenge hat. Dann gibt es zu jedem $D \in \mathcal{D}$ ein i_D mit $l_D = l_{i_D}$. Betrachte nun folgende Teilmenge von \tilde{R} :

$$\mathcal{M} := \left\{ \prod_i t_i^{\nu_i} \otimes \chi \mid \nu_i \in \mathbb{Z} \text{ und } n_D \nu_{i_D} + v_D(\chi) \geq 0 \text{ für alle } D \in \mathcal{D} \right\}.$$

Jedes $h \in k[\tilde{S}]_{\text{hom}}$ läßt sich eindeutig als $h = p \prod_i t_i^{\nu_i}$ schreiben, wobei $p \in k[x, y]$ ein homogenes Polynom ist, das durch kein t_i teilbar ist. Also wird \tilde{R} als Algebra von x, y und \mathcal{M} erzeugt. Da \mathcal{M} nach dem Gordanschen Lemma ein endlich erzeugtes Monoid ist, ist \tilde{R} als Algebra endlich erzeugt. \square

Bemerkungen: 1. Der obige Beweis folgt im wesentlichen dem Beweis von Prop. 9.2 in [LV] (Spezialfall einer $SL_2(k)$ -Einbettung). Im Fall $\text{char } k = 0$ und $c(X) = 0$ wurde der Satz von Guillemonat [Gu] bewiesen (vgl. auch [Gr1] Thm. 7).

2. Die Voraussetzung „unirational“ ist automatisch erfüllt, wenn G eine dichte Bahn in X hat. Im allgemeinen ist der Satz jedoch falsch für nichtunirationale X , wie folgendes

Beispiel zeigt: Sei C eine glatte, projektive Kurve mit Geschlecht $g \geq 1$. Wir nehmen an, daß k nicht der algebraische Abschluß eines endlichen Körpers ist. Dann gibt es ein Geradenbündel \mathcal{L}_0 auf C mit $\deg \mathcal{L}_0 = 0$, so daß \mathcal{L}_0^n nur für $n = 0$ trivial ist. Wähle ein weiteres Geradenbündel \mathcal{L}_1 mit $\deg \mathcal{L}_1 > 2g - 2$. Dann hat

$$\mathcal{A} := \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}_0^i \otimes \mathcal{L}_1^j$$

die Struktur einer Garbe von Algebren über C . Setze nun $X := \text{Spec}_{\mathcal{O}_C} \mathcal{A}$, und $G := (k^*)^2$ mit der kanonischen Operation, die von der Doppelgraduierung von \mathcal{A} herkommt. Geometrisch bedeutet dies folgendes: Sei L_i das Geradenbündel \mathcal{L}_i aufgefaßt als Varietät, $C \subset L_i$ der Nullschnitt und $L_i^* := L_i \setminus C$. Dann ist $X = L_1^* \times_C L_2^*$ mit der kanonischen $(k^*)^2$ -Operation.

Da das Monoid

$$\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid H^0(C, \mathcal{L}_0^i \otimes \mathcal{L}_1^j) \neq 0\} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid j > 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

nicht endlich erzeugt ist, ist auch

$$k[X] = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} H^0(C, \mathcal{L}_0^i \otimes \mathcal{L}_1^j)$$

nicht endlich erzeugt.

3. Auch die Voraussetzung $c(X) \leq 1$ ist optimal, wie Nagatas Beispiel zeigt: Sei $k = \mathbb{C}$, $G' := (SL_2(k))^{16}$, $U \subset G'$ eine maximal unipotente Untergruppe, $H \subset U$ eine generische Untergruppe von Kodimension drei und $X = G'/H$. Dann zeigt Nagata [Na], daß $k[X]$ nicht endlich erzeugt ist. (Genauer zeigt er, daß $k[G'/H]^U = {}^H k[G']^U = k[G'/U]^H = k[(\mathbf{A}^2)^{16}]^H$ nicht endlich erzeugt ist.) Bezüglich der G' -Operation gilt $c(X) = 3$. Nun wird aber H vom diagonalen Torus $k^* \hookrightarrow G'$ normalisiert, der somit von rechts auf X operiert. Bezüglich dieser $G = G' \times k^*$ -Operation gilt dann $c(X) = 2$.

Schließlich möchte ich den Satz noch auf radizielle Untergruppen anwenden. Dabei heißt $H \subseteq G$ *radiziell*, wenn H von einem maximalen Torus $T \subseteq G$ normalisiert wird. Sei $\Delta \subseteq \mathcal{X}(T)$ das Wurzelsystem von G und

$$\Delta_H := \{\alpha \in \Delta \mid \alpha \text{ ist Gewicht von } T \text{ in } \text{Lie } H\}$$

Dann ist $\Delta^+ = \Delta_U$ eine Menge positiver Wurzeln. Eine unipotente radizielle Untergruppe H ist eindeutig durch Δ_H festgelegt.

Korollar. Sei $H \subseteq U$ radikal in G und für $\Psi := \Delta^+ \setminus \Delta_H$ gelte

$$\dim \langle \Psi \rangle_k \geq |\Psi| - 1,$$

d.h. bis auf Vielfache besteht in Ψ höchstens eine lineare Abhängigkeitsrelation. Dann ist $k[G]^H$ endlich erzeugt.

Beweis: Sei $X = G/H$. Dann operiert auf X nicht nur G , sondern auch $T \subseteq N_G(H)$. Bezüglich dieser $G \times T$ -Operation gilt dann $c(X) = |\Psi| - \dim \langle \Psi \rangle_k \leq 1$. \square

Literatur

- [Gr1] Grosshans, F.: Hilbert's fourteenth problem for non-reductive groups. *Math. Z.* **193** (1986), 95–103
- [Gr2] Grosshans, F.: Contractions of the actions of reductive algebraic groups in arbitrary characteristic. *Invent. Math.* **107** (1992), 127–133
- [Gu] Guillemonat, A.: On finite generation of invariants for certain subalgebras of a semi-simple Lie algebra. In: *Non-Commutative Harmonic Analysis*, Springer Lecture Notes **587** (1977)
- [LV] Luna, D.; Vust, Th.: Plongements d'espaces homogènes. *Comment. Math. Helv.* **58** (1983), 186–245
- [Na] Nagata, M.: On the 14-th problem of Hilbert. *Amer. J. Math.* **81** (1959), 766–772