

Der kanonische Modul eines Invariantenrings

FRIEDRICH KNOP*

Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel, Schweiz

zur Zeit

School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA

We calculate the canonical module of a ring of invariants R of a reductive group acting on an affine variety. From that we derive a criterium for the Gorenstein property to hold for R . In case R is the ring of invariants of a graded ring we obtain lower and upper bounds for the degree of the generating function of R .

Sei G eine reductive algebraische Gruppe, die über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null definiert ist, und V eine Darstellung von G . Dann besagt das Theorem von Hochster und Roberts [4], daß der Ring R der G -invarianten Polynome auf V Cohen-Macaulaysch ist. Daher ist der kanonische Modul ω_R von R definiert, und es stellt sich nun zum Beispiel die Frage, wann ω_R ein Geradenbündel, d.h. R Gorenstein ist. Für Darstellungen endlicher Gruppen ohne Pseudospiegelungen hat Watanabe ([14]) gezeigt, daß dies genau dann der Fall ist, wenn die Gruppe unimodular operiert. Für Tori ist die Unimodularität immer noch hinreichend ([13] 13.3), und für halbeinfache Gruppen ist der Invariantenring immer Gorenstein. Daher liegt es nahe zu vermuten (Hochster, Stanley), daß Invariantenringe unimodularer Darstellungen Gorenstein sind. Dies ist aber im allgemeinen falsch, wie der folgende Satz zeigt (mit $V//G := \text{Spec } R$):

SATZ 1. *Sei G eine reductive Gruppe und V eine Darstellung von G . Dann gibt es eine reductive Gruppe \tilde{G} und eine unimodulare Darstellung \tilde{V} von \tilde{G} mit $\tilde{V}//\tilde{G} \cong V//G$.*

Beweis: Sei $\tilde{G} := Sl_2 \times Sl_3 \times G$ und $\tilde{V} := k^2 \oplus k^3 \oplus V$. Dabei operiere Sl_2 nur auf dem ersten Summanden und Sl_3 nur auf dem zweiten. Wenn schließlich λ_V der Determinantencharakter von G auf V ist, so operiere G auf k^2 (bzw. k^3) durch Multiplikation mit λ_V (bzw. λ_V^{-1}). Wegen $\tilde{V}//Sl_2 \times Sl_3 \cong V$ als G -Varietäten, folgt die Behauptung. \square

* Unterstützt durch den Schweizerischen Nationalfonds

Die Situation ist aber nicht so schlecht, wie sie nach Satz 1 scheinen mag. Sei $V_s := \{v \in V \mid \dim G_v > 0\}$ die Menge der Vektoren mit unendlicher Standgruppe. Weiter sei λ_V (bzw. λ_{ad}) der Determinantencharakter von G auf V (bzw. auf der adjungierten Darstellung). λ_{ad} ist höchstens dann nicht trivial, wenn G unzusammenhängend ist. Da G die Killingform invariant läßt, gilt $\lambda_{\text{ad}}^2 = 1$.

SATZ 2. *Es gelte:*

- a) *Die generische Bahn von G in V ist abgeschlossen.*
- b) *Die Kodimension von V_s in V ist mindestens zwei.*
- c) $\lambda_V = \lambda_{\text{ad}}$.

Dann ist $V//G$ Gorenstein.

Bemerkung: Die im Beweis von Satz 1 konstruierten Darstellungen verletzen die Bedingungen a) und b).

Es gibt noch weitere Gründe, den kanonischen Modul zu untersuchen. Sei a_i die Dimension des Raumes aller homogenen invarianten Polynome auf V vom Grad i , und $\chi_R := \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ die zugehörige erzeugende Reihe. Da ω_R ebenfalls graduiert ist, kann man analog χ_{ω_R} bilden. Es ist bekannt, daß beide Reihen die Potenzreihenentwicklung rationaler Funktionen sind, und es besteht der Zusammenhang $\chi_{\omega_R}(t) = (-1)^d \chi_R(t^{-1})$ mit $d = \dim V//G$ ([12]). Sei $q_R := -\deg \chi_R$. Dann ist q_R gleich dem kleinsten Grad eines nichttrivialen Elements aus ω_R . Dies wird benützt, um folgenden Satz zu zeigen:

SATZ 3.

- i) *Die generische Bahn von G in V sei abgeschlossen, und die generische Standgruppe sei endlich. Sei e der minimale Grad eines G -semiinvarianten Polynoms auf V zum Charakter $\lambda_V \cdot \lambda_{\text{ad}}^{-1}$. Dann gilt $q_R \leq \dim V + e$.*
- ii) *Falls G keine nichttrivialen Charaktere hat, gilt $q_R \leq \dim V$.*

Falls die Kodimension von V_s in V mindestens zwei ist, gilt in beiden Fällen sogar Gleichheit.

Wir haben auch eine Abschätzung nach unten, die sogar für beliebige Darstellungen gültig ist. Im nächsten Satz ist G^0 die Zusammenhangskomponente der Eins von G . Der halbeinfache Teil von G ist $S := [G^0, G^0]$. Schließlich ist $V_{G^0} := V/V^{G^0}$.

SATZ 4. *Sei G eine reductive Gruppe und V eine beliebige Darstellung. Dann gilt*

$$q_R \geq \dim V//G.$$

Gleichheit besteht genau dann, wenn jede G -Invariante auf V_{G^0} konstant ist und G auf V^{G^0} unimodular operiert.

Falls die generische Bahn von G in V abgeschlossen ist, dann gilt sogar $q_R \geq \dim V // S$.

Dies verbessert die Abschätzung $q_R \geq 0$ von Kempf [5]. Sei $f_1, \dots, f_d \in R$ ein homogenes System von Parametern, d.h. die f_i sind homogen, algebraisch unabhängig, und R ist ein endlich erzeugter Modul über $R_0 := k[f_1, \dots, f_d]$. Die Cohen-Macaulay-Eigenschaft von R ist dann äquivalent dazu, daß R sogar ein freier R_0 -Modul ist ([4]). Sei g_1, \dots, g_r eine R_0 -Basis von R . Sei weiter $a_i := \deg f_i$ und $b_i := \deg g_i$. Dann ist

$$\chi_R(t) = \frac{t^{b_1} + \dots + t^{b_r}}{(1 - t^{a_1}) \dots (1 - t^{a_d})},$$

also $q_R = \sum_i a_i - \max_i b_i$. Aus Satz 4 folgt somit

$$\max_i b_i \leq \sum_i a_i - \dim V // G.$$

Dies ergibt einen Algorithmus, um aus einem homogenen System von Parametern ein Erzeugendensystem von R zu bestimmen (s. [10]).

Die Abschätzung nach oben ist vor allem interessant, wenn V koregulär, d.h. R ein Polynomring ist. In diesem Fall ist $r = 1$ und $g_1 \equiv 1$, d.h. $q_R = \sum_i a_i$. Wir nehmen weiterhin an, daß V keinen trivialen Summanden besitzt. Dann ist $a_i \geq 2$, sowie $d \leq \dim V - \dim G$. Aus Satz 3 folgt dann sofort $\dim V \leq 2 \dim G + e$, was eine starke Einschränkung für V ist, insbesondere, wenn G keine Charaktere hat ($e = 0$).

Vereinbarung: Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null definiert. Varietäten sind irreduzibel.

Ich werde im folgenden intensiv die Eigenschaften reflexiver Rang-1-Garben auf einer normalen Varietät benutzen (siehe etwa [2]). Eine kohärente Garbe \mathcal{G} auf X heißt *reflexiv*, wenn sie kanonisch isomorph zu ihrem Doppeldual $\mathcal{G}^{\vee\vee}$ ist. Die duale Garbe \mathcal{G}^\vee ist immer reflexiv. Der Rang von \mathcal{G} ist eins, wenn \mathcal{G}_η für den generischen Punkt η ein eindimensionaler k_η -Vektorraum ist. Ein Geradenbündel auf X ist Rang-1-reflexiv. Die Umkehrung gilt genau dann, wenn X lokal faktoriell ist. Insbesondere ist die Einschränkung $\mathcal{G}|_{X_{\text{reg}}}$ auf den glatten Teil von X ein Geradenbündel. Ausgiebigen Gebrauch werde ich von der Tatsache machen, daß man eine reflexive Garbe nur in Kodimension eins zu kennen braucht. Das soll heißen: Sei $U \subseteq X$ eine offene Menge, so daß die Kodimension von $X \setminus U$ in X mindestens zwei ist, und $j : U \hookrightarrow X$ sei der Einbettungsmorphismus. Dann ist $\mathcal{G} \mapsto j_*\mathcal{G}$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der reflexiven Garben auf U und der auf X . Die Umkehrung ist die Einschränkung j^* . Da X normal ist, kann man dies insbesondere auf $U := X_{\text{reg}}$ anwenden. Man erhält damit eine Äquivalenz zwischen Geradenbündeln auf

X_{reg} und reflexiven Rang-1-Garben auf X . Für einen Divisor D auf X und eine reflexive Garbe \mathcal{G} sei dann $\mathcal{G}[D] := j_*(\mathcal{G}|_U \otimes \mathcal{O}_U(D \cap U))$. Wir definieren $\omega_X := (\bigwedge^n \Omega_X)^{\vee\vee}$ mit $n = \dim X$. Falls X Cohen-Macaulay ist, stimmt ω_X mit der dualisierenden Garbe überein, da diese reflexiv ist ([3] Korollar 7.29). Für einen Morphismus $\varphi : X \rightarrow Y$ sei $\tau_{X/Y} := (\bigwedge^l \Omega_{X/Y})^\vee$, mit $l := \dim X - \dim Y$.

Sei nun G eine reduktive algebraische Gruppe, sowie X eine n -dimensionale normale affine G -Varietät. Weiter sei $Y := X//G := \text{Spec } \mathcal{O}_X(X)^G$ das Spektrum des Invariantenringes, sowie $\pi : X \rightarrow Y$ der Quotientenmorphismus. Die Dimension von Y sei d , und $l := n - d$. Das folgende Lemma aus [9] (Lemma 2.1) ermöglicht es Quotientenmorphisme zu erkennen:

LEMMA 1. *Seien U und V affine Varietäten, V sei normal. Sei $\varphi : U \rightarrow V$ ein surjektiver, birationaler Morphismus. Dann ist φ ein Isomorphismus.*

Der Quotient Y parametrisiert nicht alle Bahnen, sondern nur die abgeschlossenen, d.h. in jeder Faser von π liegt genau eine abgeschlossene Bahn. Dann folgt aus Lemma 1: $\pi : X \rightarrow Y$ ist genau dann der Quotientenmorphismus, wenn gilt: Y ist affin und normal, π ist G -invariant und surjektiv, und es gibt eine Faser von π , die genau eine abgeschlossene Bahn enthält.

Eine Folgerung aus Lunas Scheibensatz [8] ist, daß es eine offene Teilmenge $U \subseteq Y$ gibt, so daß $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ ein lokal triviales Faserbündel bezüglich der étalen Topologie ist. Insbesondere ist es gerechtfertigt, von „der“ generischen Faser von π zu sprechen. Wenn sie genau eine Bahn bildet, sagen wir, daß „die“ generische Bahn abgeschlossen ist. Diese Bedingung kann man noch etwas abschwächen:

Wenn nicht anders angegeben, setzen wir im folgenden immer voraus, daß die generische Faser von π eine offene, dichte Bahn enthält. Dies ist äquivalent dazu, daß auf X jede invariante rationale Funktion Quotient invarianter regulärer Funktionen ist. Ebenfalls ist dazu äquivalent, daß es einen Punkt $x \in X$ gibt mit $\dim Gx = \dim X - \dim Y$. Dies schließt zum Beispiel für $n \geq 2$ die Operation von k^* auf k^n durch skalare Multiplikation aus. Die Voraussetzung ist automatisch erfüllt, wenn $\mathcal{O}_X(X)$ faktoriell ist, und G keine Charaktere unendlicher Ordnung besitzt (vgl. Satz 6b) unten). Eine Folge unserer Voraussetzung ist, daß es eine offene Teilmenge von X gibt, auf der die Standgruppen zueinander konjugiert sind. Man kann also wieder von „der“ generischen Standgruppe sprechen. Allgemein kann man aber immer von der Dimension der generischen Standgruppe reden.

Sei $Y_0 \subseteq Y$ die offene Teilmenge aller glatten Punkte $y \in Y$ mit $\dim \pi^{-1}(y) = l$, sowie $X_1 := \pi^{-1}(Y_0)$ und $X_0 := X_{\text{reg}} \cap X_1$. Das Komplement von Y_0 in Y (bzw. X_0 in X_1) hat mindestens die Kodimension zwei. Wir betrachten nun die kanonische exakte Sequenz von

Differentialmoduln:

$$0 \longrightarrow \pi^* \Omega_{Y_0} \longrightarrow \Omega_{X_0} \longrightarrow \Omega_{X_0/Y_0} \longrightarrow 0$$

Diese Sequenz ist links exakt, da $\pi^* \Omega_{Y_0}$ lokal frei ist, der Kern aber nur aus Torsionselementen bestehen kann. Daraus ergibt sich kanonisch ein Morphismus $\pi^* \omega_{Y_0} \otimes \bigwedge^l \Omega_{X_0/Y_0} \rightarrow \omega_{X_0}$, und damit ein Morphismus $\Phi : \pi^* \omega_{Y_0} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\bigwedge^l \Omega_{X_0/Y_0}, \omega_{X_0}) = \tau_{X_0/Y_0} \otimes \omega_{X_0}$. Durch Übergang zu den G -Invarianten erhalten wir

$$\Phi_0 : \omega_{Y_0} \rightarrow \pi_*(\tau_{X_0/Y_0} \otimes \omega_{X_0})^G.$$

Obwohl Φ im allgemeinen kein Isomorphismus ist, gilt:

LEMMA 2. Φ_0 ist ein Isomorphismus.

Beweis: Die linke Garbe ist reflexiv und hat Rang eins. Die rechte Garbe ist torsionsfrei und hat höchstens Rang eins. Daher genügt es zu zeigen, daß Φ_0 ein Isomorphismus in Kodimension eins ist. Sei D ein irreduzibler Divisor von Y_0 . Durch Verkleinern von Y_0 können wir annehmen, daß $D = (f_0)$ ein Hauptdivisor ist. Sei $\pi^{-1}(D) = \sum_i m_i D_i$ der zugehörige Divisor in X_1 .

1. Fall: G ist endlich. Dann ist $\tau_{X_0/Y_0} = 0$. Sei H_i die Untergruppe von G , die D_i punktweise invariant läßt. Dann ist H_i zyklisch der Ordnung m_i , und lokal (in der étalen Topologie) sieht π aus wie $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1^{m_i}, x_2, \dots, x_n)$. ω_{X_0} wird erzeugt von $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ und damit $\omega_{X_0}^H$ von $x_1^{m_i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, was aber auch ω_{Y_0} erzeugt. Also ist Φ_0 ein Isomorphismus.

2. Fall: G ist beliebig reduktiv. Sei m das kleinste gemeinsame Vielfache der Multiplizitäten m_i . Weiter sei $Y' := \{(y, t) \in Y_0 \times \mathbf{A}^1 \mid f_0(y) = t^m\}$, die m -fach in D verzweigte Überlagerung von Y_0 , und μ_m die zugehörige Galoisgruppe. Wir setzen $X'' := X_0 \times_{Y_0} Y'$. Sei X' die Normalisierung von X'' . Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{\varphi'} & X'' & \xrightarrow{\varphi''} & X_0 \\ & \searrow \pi' & \downarrow \pi'' & & \downarrow \pi \\ & & Y' & \xrightarrow{\varphi_0} & Y_0 \end{array}$$

Sei $\varphi := \varphi'' \circ \varphi'$. Es ist $X' // \mu_m = X_0$ und $X' // G = Y'$, denn φ und π' sind surjektiv und generisch Quotientenmorphisma (Lemma 1). Die Φ und Φ_0 entsprechenden Morphismen für das Paar (X', Y') seien Φ' bzw. Φ'_0 . Nach Konstruktion ist π' glatt in Kodimension eins, d.h. durch Entfernen einer abgeschlossenen Menge der Kodimension zwei können wir erreichen, daß π' glatt ist. Dies bedeutet, daß Φ' und damit erst recht Φ'_0 ein Isomorphismus

ist. Es gilt $\varphi'^{*}\Omega_{X_0/Y_0} = \Omega_{X''/Y'}$, da das rechte Quadrat kartesisch ist. Weiterhin besteht die exakte Sequenz

$$\varphi'^{*}\Omega_{X_0/Y_0} = \varphi'^{*}\Omega_{X''/Y'} \longrightarrow \Omega_{X'/Y'} \longrightarrow \Omega_{X'/X''} \longrightarrow 0.$$

$\Omega_{X'/Y'}$ ist lokal frei, und damit ist der Kern des linken Pfeils genau der Torsionsuntermodul. Nach Konstruktion wird X'' in einer étalen Umgebung von $\varphi^{-1}(D_i)$ durch die Gleichung $t^m = x_1^{m_i}$ beschrieben. Wegen $m_i|m$ sind die Zweige von X'' in $\varphi^{-1}(D_i)$ glatt, insbesondere ist $\Omega_{X'/X''} = 0$. Dies ergibt zusammen mit der Flachheit von φ

$$\tau_{X'/Y'} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X'}}(\varphi'^{*}\bigwedge^l \Omega_{X_0/Y_0}, \mathcal{O}_{X'}) = \varphi'^{*}\tau_{X_0/Y_0}.$$

Für μ_m ist das Lemma schon bewiesen. Damit folgt

$$(\varphi'_*\omega_{X'})^{\mu_m} = \omega_{X_0} \quad \text{und} \quad (\varphi_0*\omega_{Y'})^{\mu_m} = \omega_{Y_0}.$$

Also gilt

$$\varphi'_*(\tau_{X'/Y'} \otimes \omega_{X'})^{\mu_m} = (\tau_{X_0/Y_0} \otimes \varphi'_*\omega_{X'})^{\mu_m} = \tau_{X_0/Y_0} \otimes \omega_{X_0}$$

Schließlich erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \omega_{Y_0} &= (\varphi_0*\omega_{Y'})^{\mu_m} = \varphi_0*\pi'_*(\tau_{X'/Y'} \otimes \omega_{X'})^{G \times \mu_m} = \\ &= \pi_*[\varphi'_*(\tau_{X'/Y'} \otimes \omega_{X'})^{\mu_m}]^G = \pi_*(\tau_{X_0/Y_0} \otimes \omega_{X_0})^G. \end{aligned}$$

□

Sei D_π die Summe aller irreduziblen Divisoren auf X mit $\text{kodim}_Y \pi(D) \geq 2$. Dies sind ebenfalls die Komponenten der Kodimension eins von $X \setminus X_0$. Sei $j : X_0 \hookrightarrow X$ die offene Einbettung. Dann ist $j_*(\tau_{X_0/Y_0} \otimes \omega_{X_0}) = \bigcup_p (\tau_{X/Y} \otimes \omega_X [pD_\pi])^{\vee\vee}$ und wir erhalten, wenn wir noch Φ_0 invertieren

LEMMA 3. *Für jedes p gibt es einen kanonischen Morphismus*

$$\Psi_p : \pi_*[(\tau_{X/Y} \otimes \omega_X [pD_\pi])^{\vee\vee}]^G \longrightarrow \omega_Y$$

Ψ_p ist injektiv und ein Isomorphismus in Kodimension eins. Für genügend großes p ist Ψ_p ein Isomorphismus.

Dieser Satz nützt natürlich nichts, wenn man $\tau_{X/Y}$ nicht kennt. Wir verfeinern dazu zunächst die Konstruktion aus [6]. Sei $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$. Jedes $\xi \in \mathfrak{g}$ induziert ein Vektorfeld ξ_* auf X . Dies liefert einen kanonischen Homomorphismus $\bar{\alpha} : \Omega_X \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{O}_X$. Sei $\Gamma(X, G)$ oder kurz Γ der Kokern von $\bar{\alpha}$. Weiter sei $M^{\text{tf}} := M / \text{Torsion } M$ für einen \mathcal{O}_X -Modul M .

LEMMA 4. *Folgende Sequenz ist exakt:*

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/Y}^{\text{tf}} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{O}_X \xrightarrow{\beta} \Gamma \longrightarrow 0$$

Beweis: Betrachte folgende exakte Sequenz von Differentialmoduln:

$$\pi^* \Omega_Y \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

Der Modul $\pi^* \Omega_Y$ wird von Elementen der Form $f \otimes dg$ erzeugt, wobei g eine invariante Funktion auf X ist. Es gilt $\bar{\alpha}(fdg)(\xi) = fdg(\xi_*) = f\xi_*(g) = 0$. Also verschwindet $\bar{\alpha}$ auf dem Bild von $\pi^* \Omega_Y$, d.h. $\bar{\alpha}$ faktorisiert durch $\Omega_{X/Y}$. Nach unserer allgemeinen Voraussetzung gibt es eine offene, dichte Teilmenge $U \subseteq X$, so daß die Bahn jedes $x \in U$ (schematisch) dicht in der Faser $\pi^{-1}(\pi(x))$ ist. In diesen Punkten gilt daher $\Omega_{X/Y,x} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^* \subseteq \mathfrak{g}^*$, d.h. $\bar{\alpha} : \Omega_{X/Y} \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{O}_X$ ist injektiv auf U . Dies bedeutet, daß der Kern von $\bar{\alpha}$ ein Torsionsmodul ist. Da aber $\mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{O}_X$ torsionsfrei ist, ist Kern $\bar{\alpha} = \text{Torsion } \Omega_{X/Y}$. \square

Sei $\Gamma_t := \text{Torsion } \Gamma$ und $\Gamma' := \beta^{-1}(\Gamma_t)$. Weiter sei l_D für einen irreduziblen Divisor $D \subset X$ die Länge des $\mathcal{O}_{X,D}$ -Moduls $\Gamma_t \otimes \mathcal{O}_{X,D}$, sowie $D_\mu := \sum_D l_D D$. Setze nun noch $\lambda := (\bigwedge^{g-l} \Gamma)^{\vee\vee}$ mit $g := \dim G$ und $\Theta := \Theta_G := \bigwedge^g \mathfrak{g}$. Dann erhält man:

$$\text{LEMMA 5. } \tau_{X/Y} = \lambda[D_\mu] \otimes_k \Theta.$$

Beweis: Da es sich wieder um reflexive Garben handelt, genügt es den Isomorphismus in Kodimension eins nachzuweisen. Sei dazu $D \subset X$ ein irreduzibler Divisor und f ein Erzeuger des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{X,D}$. Dann gibt es nach dem Elementarteilersatz eine Basis s_1, \dots, s_l von $\Gamma' \otimes \mathcal{O}_{X,D}$ und natürliche Zahlen a_1, \dots, a_l , so daß $f^{a_1} s_1, \dots, f^{a_l} s_l$ eine Basis von $\Omega_{X/Y}^{\text{tf}} \otimes \mathcal{O}_{X,D}$ bilden. Dabei ist $l_D = \sum_{i=1}^l a_i$. Also ist $\bigwedge^l \Omega_{X/Y}^{\text{tf}} \otimes \mathcal{O}_{X,D} = \bigwedge^l \Gamma'[-l_D D] \otimes \mathcal{O}_{X,D}$, und damit $\tau_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_{X,D} = (\bigwedge^l \Gamma')^\vee[l_D D] \otimes \mathcal{O}_{X,D}$. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma' \longrightarrow \mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{O}_X \longrightarrow \Gamma^{\text{tf}} \longrightarrow 0$$

liefert dann $\bigwedge^l \Gamma' \otimes \bigwedge^{g-l} \Gamma^{\text{tf}} \otimes \mathcal{O}_{X,D} \xrightarrow{\sim} \Theta^* \otimes_k \mathcal{O}_{X,D}$ und damit die Behauptung. \square

Daraus folgt das Hauptergebnis dieser Arbeit:

SATZ 5. *Für jedes p gibt es einen kanonischen Morphismus*

$$\Psi_p : \pi_*[\Theta \otimes_k (\lambda[D_\mu] \otimes \omega_X[pD_\pi])^{\vee\vee}]^G \longrightarrow \omega_Y$$

Ψ_p ist injektiv und ein Isomorphismus in Kodimension eins. Für genügend großes p ist Ψ_p ein Isomorphismus.

Es bleibt noch der Modul Γ zu untersuchen. Nach Definition ist $\Omega_X \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{O}_X \xrightarrow{\beta} \Gamma \rightarrow 0$ exakt. Geht man zu den Fasern in einem Punkt $x \in X$ über und dualisiert, so erhält man

$$0 \longrightarrow \Gamma_x^* \longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\gamma} T_{X,x},$$

wobei $T_{X,x}$ der Zariskitangententialraum von X in x und γ die Ableitung der Orbitabbildung ist. Also gilt $\Gamma_x \cong \mathfrak{g}_x^*$. Dieser Zusammenhang läßt sich globalisieren. Sei $\mathfrak{H} \subseteq G \times X$ das Standgruppenschema der Wirkung von G auf X . Als Menge ist \mathfrak{H} gleich $\{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\}$. Es wird durch die Gleichungen $f(gx) = f(x)$ für alle $f \in \mathcal{O}_X(X)$ definiert. Weiter sei \mathcal{C} der Konormalenmodul von $X \equiv \{e\} \times X$ in \mathfrak{H} . Der Modul \mathcal{C} ist ein Quotient des Konormalenmoduls $\mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{O}_X$ von X in $G \times X$. Die Relationen erhält man, indem man die definierenden Gleichungen von \mathfrak{H} nach g ableitet: $0 = df(\xi_*) \in \mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{O}_X$ mit $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Dies liefert die exakte Sequenz

$$\Omega_X \xrightarrow{\alpha'} \mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0.$$

Offenbar ist $\alpha' = \bar{\alpha}$ und damit $\Gamma = \mathcal{C}$.

Leider läßt sich über λ nicht viel sagen. Folgendes ergibt sich aus der obigen Diskussion von Γ :

LEMMA 6.

- a) *Wenn die generische Standgruppe von G in X endlich ist, dann ist λ kanonisch trivial. Dies ist immer der Fall, wenn G effektiv operiert und der halbeinfache Teil von G verschwindet.*
- b) *Es gibt einen nichttrivialen Homomorphismus $\bigwedge^{g-l} \mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{O}_X \rightarrow \lambda$.*

Bemerkung: λ läßt sich auch folgendermaßen konstruieren: $\bigwedge^{g-l} \mathfrak{g}_x$ ist für einen allgemeinen Punkt $x \in X$ eine Gerade in $\bigwedge^{g-l} \mathfrak{g}$ und liefert damit einen rationalen Morphismus $\delta : X \rightarrow \mathbf{P}(\bigwedge^{g-l} \mathfrak{g})$. Da X normal ist, ist δ bis auf eine Menge von mindestens Kodimension zwei definiert. Sei $\mathcal{O}(1)$ das kanonische Geradenbündel auf dem projektiven Raum. Dann ist $\lambda = \delta^* \mathcal{O}(1)$.

Über die Divisoren D_π und D_μ ist etwas mehr bekannt.

Bezeichnung: Für eine irreduzible, abgeschlossene G^0 -invariante Teilmenge Z sei $s(Z)$ die Dimension der Standgruppe eines generischen Punktes von Z .

Sei \mathcal{D} die Menge aller G^0 -invarianten, irreduziblen Divisoren D in X . Wir teilen \mathcal{D} in vier Typen ein:

- I. Die Kodimension von $\pi(D)$ in Y ist mindestens zwei. Dies sind die Divisoren aus denen D_π zusammengesetzt ist.

II. $\pi : D \rightarrow Y$ ist dominant.

III. $\pi(D)$ ist ein Divisor in Y , aber $\pi^{-1}(\pi(x))$ enthält für kein $x \in D$ eine offene Bahn.

Dies äquivalent zu $\dim D//G^0 = \dim X//G - 1$ und $s(D) > s(X)$.

IV. $\pi(D)$ ist ein Divisor von Y , und $s(D) = s(X)$.

Wie man sich leicht überlegt, sind fast alle $D \in \mathcal{D}$ vom Typ IV. Wenn wir $D_s := \sum_{D \in \mathcal{D}} (s(D) - s(X))D$ setzen, so gilt:

SATZ 6.

a) $\text{supp } D_\mu = \text{supp } D_s$ und $D_\mu \geq D_s$.

b) Falls die Charaktergruppe von G und die Divisorklassengruppe von X Torsionsgruppen sind, dann sind alle $D \in \mathcal{D}$ vom Typ III oder IV.

c) Falls der halbeinfache Teil von G verschwindet, dann ist $D_s = D_\mu$, und D_s ist genau die Summe der Divisoren vom Typ II.

d) Falls der halbeinfache Teil von G verschwindet, X rationale Singularitäten hat und D_s ein Cartierdivisor ist, dann ist $\Psi_0 : \pi_*(\Theta \otimes_k \omega_X[D_s])^G \rightarrow \omega_Y$ ein Isomorphismus.

Beweis: a) Sei $D \in \mathcal{D}$. Dann ist nach Definition die Multiplizität von D in D_μ gleich der Länge des $\mathcal{O}_{X,D}$ -Moduls $\Gamma_t \otimes \mathcal{O}_{X,D}$. Diese ist mindestens $\dim_{k_D} \Gamma \otimes k_D - \text{rg } \Gamma = s(D) - s(X)$, wobei k_D der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{X,D}$ ist. Dies zeigt die Ungleichung. Bei $s(D) = s(X)$ ist $\Gamma \otimes \mathcal{O}_{X,D}$ torsionsfrei, woraus die erste Behauptung folgt.

b) Sei $D_0 \in \mathcal{D}$ und $D := \sum_{g \in G/G^0} D_0^g$. Dann gibt es nach Voraussetzung eine positive ganze Zahl q und eine Funktion f mit $qD = (f)$, und $\sigma : G \rightarrow \mathcal{O}_X^*(X) : g \mapsto f^g f^{-1}$ ist ein 1-Kozykel. Es genügt zu zeigen, daß $H^1(G, \mathcal{O}_X^*(X))$ eine Torsionsgruppe ist. Denn dann gibt es eine positive ganze Zahl p und eine Einheit h auf X mit $\sigma(g)^p = h^g h^{-1}$, d.h. $f_0 := f^p h^{-1}$ ist ein Invariante mit $pqD = (f_0)$. Also ist $\pi(D)$ ein Divisor.

Sei $E := G/G^0$ und $A := \mathcal{O}_X^*(X)$. Ein Teil der Fünftermsequenz, die zur Hochschild-spektralsequenz gehört, ist dann:

$$H^1(E, A) \longrightarrow H^1(G, A) \longrightarrow H^1(G^0, A)^E$$

Die Gruppe links ist eine Torsionsgruppe, da E endlich ist. Weil G^0 zusammenhängend ist, gilt $H^1(G^0, A)^E = H^1(G^0, k^*)^E$. Dieselbe Fünftermsequenz mit k^* anstelle A liefert:

$$H^1(G, k^*) \longrightarrow H^1(G^0, k^*)^E \longrightarrow H^2(E, k^*)$$

Die linke Gruppe ist jedoch nach Annahme eine Torsionsgruppe, und die rechte ebenfalls, wieder weil E endlich ist.

c) Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß G ein Torus ist, der auf X effektiv operiert. Sei $D \in \mathcal{D}$ mit $s(D) > s(X) = 0$. Sei H der generische

Stabilisator von D . Wegen der Starrheit von H in G gilt $D \subseteq X^H$, und damit $D \equiv D//H \hookrightarrow X//H$. Aus Dimensionsgründen ist diese Abbildung dominant. Also ist auch $D \rightarrow Y$ dominant, d.h. D ist vom Typ II. Die restliche Behauptung ist gezeigt, wenn wir beweisen, daß die Multiplizität von D in D_μ eins ist. Nach Lunas Scheibensatz [8] gibt es eine offene Teilmenge U' von Y , so daß $\pi : \pi^{-1}(U') \rightarrow U'$ ein bezüglich der étalen Topologie lokal triviales Faserbündel ist, d.h. es gibt eine étale Überlagerung $U \rightarrow U'$ mit $\pi^{-1}(U') \times_{U'} U \cong \overline{G} \times U$. Nach unserer allgemeinen Voraussetzung hat G eine offene, dichte Bahn in \overline{G} , d.h. \overline{G} ist eine affine, normale Toruseinbettung. Uns interessiert nur eine offene G -invariante Umgebung von D . Daher können wir annehmen, daß $G = (k^*)^l$ mit Koordinaten t_i und $X = k \times (k^*)^{l-1} \times Y$ mit Koordinaten x_i, y_i ist, sowie $D = \{x_1 = 0\}$. Nach Lemma 3 wird dann Γ von den dt_i erzeugt mit den Relationen $x_i dt_i = 0$. Also ist $l_D = 1$.

d) Nach [11] gibt es einen projektiven, birationalen Morphismus $\varphi : \overline{Y} \rightarrow Y$, mit folgender Eigenschaft: Die Komponente \overline{X} von $X \times_Y \overline{Y}$, die dominant über \overline{Y} liegt, ist flach über \overline{Y} . Nach Hironaka können wir \overline{Y} sogar glatt wählen. Außerdem ersetzen wir noch \overline{X} durch seine Normalisierung. Dann ist $\overline{\pi}$ nicht mehr unbedingt flach, aber immer noch äquidimensional. Insbesondere ist $D_{\overline{\pi}} = \emptyset$. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & X \\ \overline{\pi} \downarrow & & \pi \downarrow \\ \overline{Y} & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Nach [1] hat auch Y rationale Singularitäten, was insbesondere $\varphi_* \omega_{\overline{Y}} = \omega_Y$ bedeutet. Es gilt auch $\overline{\varphi}_* \omega_{\overline{X}} = \omega_X$, denn: Sei $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow \overline{X}$ eine Desingularisierung. Dann ist $\omega_X = \overline{\varphi}_* \tilde{\varphi}_* \omega_{\tilde{X}} \subseteq \overline{\varphi}_* \omega_{\overline{X}} \subseteq \omega_X$. Wir wollen nun Satz 5 auf $\overline{\pi} : \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ anwenden. Allerdings sind \overline{X} und \overline{Y} nicht mehr affin. Die Aussage von Satz 5 ist jedoch trotzdem gültig, da sie lokal für Y ist und für eine affine, offene Menge U von \overline{Y} und die Abbildung $\overline{\pi}^{-1}(U) \rightarrow U$ alle Voraussetzungen erfüllt sind. Wir konstruieren nun die Umkehrung von Ψ_0 . Nach Voraussetzung ist $\mathcal{O}_X[D_s]$ und damit auch $\overline{\varphi}^* \mathcal{O}_X[D_s]$ ein Geradenbündel, insbesondere also reflexiv. Wegen $\overline{D}_s \subseteq \overline{\varphi}^{-1}(D_s)$ (nach c), hier geht ein, daß der halbeinfache Teil verschwindet) gibt es einen kanonischen Morphismus $\mathcal{O}_{\overline{X}}[\overline{D}_s] \rightarrow \overline{\varphi}^* \mathcal{O}_X[D_s]$. Dies liefert

$$\overline{\varphi}_*(\omega_{\overline{X}}[\overline{D}_s]) \longrightarrow \overline{\varphi}_*(\omega_{\overline{X}} \otimes \overline{\varphi}^* \mathcal{O}_X[D_s]) = \overline{\varphi}_* \omega_{\overline{X}} \otimes \mathcal{O}_X[D_s] = \omega_X[D_s].$$

Die Umkehrung von Ψ_0 ist schließlich

$$\omega_Y = \varphi_* \omega_{\overline{Y}} = \varphi_* \overline{\pi}_*(\omega_{\overline{X}}[\overline{D}_s])^G = \pi_* \overline{\varphi}_*(\omega_{\overline{X}}[\overline{D}_s])^G \longrightarrow \pi_*(\omega_X[D_s])^G.$$

□

Typisches Beispiel einer G -Varietät mit $D_s \neq 0$ ist die Gruppe Sl_n , die von links auf den $n \times n$ -Matrizen operiert. Die Varietät $X' := \{(A, t) \in M_{n,n} \times k \mid \det A = t^2\}$ ist ein Beispiel für eine Gruppenoperation mit $D_\mu \neq D_s$. Ich kenne allerdings keines mit einer glatten Varietät. Wenn es eines gibt, dann gibt es nach Lunas Scheibensatz [8] sogar eine Darstellung mit eindimensionalen Quotienten und $D_\mu \neq D_s$.

KOROLLAR 1. *Sei X faktoriell mit rationalen Singularitäten. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\Psi_0 : \pi_*(\Theta \otimes_k \lambda[D_\mu] \otimes \omega_X)^G \longrightarrow \omega_Y.$$

Beweis: Sei $S := [G^0, G^0]$ der halbeinfache Teil von G und $Z := X//S$. Weiter sei H der Kern der Wirkung von G auf Z , sowie $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$, $A := G/H$ und $\mathfrak{a} := \text{Lie } A$. Dann ist $\pi' : X \rightarrow Z$ ebenfalls der Quotientenmorphismus von X bezüglich H und $\pi'' : Z \rightarrow Y$ der von Y bezüglich A . Wegen $D_{\pi'} = \emptyset$ (Satz 6b)), ist

$$\pi'_*(\Theta_H \otimes_k \lambda(X, H)[D_\mu(X, H)] \otimes \omega_X)^G \rightarrow \omega_Z \quad (*)$$

ein Isomorphismus. Z ist ebenfalls faktoriell mit rationalen Singularitäten ([1]). Nach Satz 6d) ist

$$\pi''_*(\Theta_A \otimes_k \mathcal{O}_Z[D_\mu(Z, A)] \otimes \omega_Z)^A \rightarrow \omega_Y \quad (**)$$

ein Isomorphismus. Durch Einsetzen von (*) in (**) ergibt sich die Behauptung, wenn wir noch zeigen:

- i) $\Theta_G = \Theta_H \otimes_k \Theta_A$
- ii) $\lambda(X, G)[D_\mu(X, G)] = \lambda_\mu(X, H)[D_\mu(X, H)] \otimes \pi'^* \mathcal{O}_Y[D_\mu(Y, A)]$
- i) ist klar.
- ii) Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi'^* \Omega_{Z/Y} & \longrightarrow & \Omega_{X/Y} & \longrightarrow & \Omega_{X/Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a}^* \otimes_k \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathfrak{h}^* \otimes_k \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \end{array}$$

Nach [6] Satz 2 ist $\pi' : X \rightarrow Z$ glatt in Kodimension eins. Daher ist $\Omega_{X/Z}$ torsionsfrei und der rechte senkrechte Pfeil injektiv in Kodimension eins. Das Schlangenlemma ergibt dann für die Kokerne: Die Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi'^* \Gamma(Z, A) \longrightarrow \Gamma(X, G) \longrightarrow \Gamma(X, H) \longrightarrow 0$$

ist exakt in Kodimension eins. Weiterhin ist $\Gamma(Z, A)$ ein Torsionsmodul (Lemma 6a)). Daher ist $\lambda(X, G) = \lambda(X, H)$ und $D_\mu(X, G) = D_\mu(X, H) + \pi'^* D_\mu(Z, A)$. \square

Sei $X_s := \{x \in X \mid \mathfrak{g}_x \neq 0\}$. Satz 2 ist nun ein Spezialfall von

KOROLLAR 2. *Sei X faktoriell mit rationalen Singularitäten. Es gelte $\text{kodim}_X X_s \geq 2$. Dann ist $\Psi_0 : \pi_*(\Theta \otimes_k \omega_X)^G \rightarrow \omega_Y$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist Y Gorenstein, wenn $\Theta \otimes_k \omega_X$ äquivariant trivial ist.*

Bemerkungen: 1. Mit Hilfe des Satzes von Luna und Richardson [9] kann man eine beliebige Darstellung auf den Fall reduzieren, daß die generische Standgruppe trivial und die generische Bahn abgeschlossen ist.

2. In [7] sind alle Darstellungen einfacher Gruppen, sowie alle irreduziblen Darstellungen halbeinfacher Gruppen aufgeführt, für die $\text{kodim}_V V_s \leq 1$ ist.

3. Sei μ_3 die Gruppe der dritten Einheitswurzeln mit dem kanonischen Charakter ζ . Setze $G := Sl_2 \times \mu_3$ und $V := k^2 \oplus k^2 \oplus k$ mit folgender Operation: Sl_2 operiere nicht trivial auf den beiden ersten Summanden und μ_3 mit den Charakteren $\zeta, 1, \zeta$. Man sieht leicht mit Watanabes Kriterium, daß der Quotient nicht Gorenstein ist. Erklärung: Bedingung b) von Satz 2 ist verletzt.

4. Sei $G := O(2)$ die orthogonale Gruppe. Sei V_1 die definierende Darstellung, $V_2 := \bigwedge^2 V_1$, sowie $V(n) := V_1 \oplus V_2^{\oplus n}$. Es sei $n \geq 2$. Dann gilt: $V(n)//G$ ist genau dann Gorenstein, wenn $V(n)$ nicht unimodular ist ($\Leftrightarrow n$ ist gerade). Hier ist $\lambda_{\text{ad}} \neq 1$.

Sei ab jetzt $\mathcal{O}_X(X)$ positiv graduiert, d.h. $\mathcal{O}_X(X) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ mit $S_i S_j \subseteq S_{i+j}$ und $S_0 = k$. Weiter habe X rationale Singularitäten. Wir wollen q_Y nach oben abschätzen. Wie in der Einleitung erwähnt, genügt es, den Grad eines Elements aus ω_Y zu kennen. Dazu müssen wir ein G -invariantes Element aus $\Theta \otimes_k \lambda[D_\mu] \otimes \omega_X$ finden. Zunächst bemerken wir, daß $\mathcal{O}_X[D_\mu]$ einen kanonischen G -invarianten Schnitt besitzt. Daher müssen wir ein invariantes Element in $\Theta \otimes_k \lambda \otimes \omega_X$ finden. Wenn λ trivial ist, erhalten wir

KOROLLAR 3. *Sei $\mathcal{O}_X(X)$ positiv graduiert. X habe rationale Singularitäten. Die generische Standgruppe sei endlich. Weiter sei d der Grad eines G -invarianten Elements aus $\Theta \otimes_k \omega_X$. Dann ist $q_Y \leq d$.*

Beweis von Satz 3: i) ist ein Spezialfall von Korollar 3. Denn sei f ein G -semi-invariantes Polynom zum Charakter $\lambda_V \cdot \lambda_{\text{ad}}^{-1}$. Dann ist $f \cdot \theta \otimes dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ (mit $\Theta = k\theta$) invariant mit dem Grad $d = e + n$.

Wenn X faktoriell ist und G keine nichttrivialen Charaktere hat, wird λ von einem G -invarianten Element s erzeugt. Nach Lemma 6b) gibt es Elemente aus λ mit dem Grad 0, nämlich im Bild von $\bigwedge^{g-l} \mathfrak{g}^* \otimes 1$. Also gilt $\text{deg } s \leq 0$, woraus ii) folgt.

Der letzte Teil folgt direkt aus Korollar 2. □

Bemerkungen: 1. Unter den angegebenen Voraussetzungen gibt es immer eine Semiinvariante zum Charakter $\chi := \lambda_V \cdot \lambda_{\text{ad}}^{-1}$: Sei x ein generischer Punkt und H seine Standgruppe. Da H endlich ist, ist der Tangentialraum der Bahn Gx in x isomorph zu \mathfrak{g} . Also ist $V = \mathfrak{g} \oplus N$ als H -Modul mit trivialer Operation auf N ([8]). Es gilt daher $\chi|_H \equiv 1$ und χ induziert eine Funktion f_0 auf $G/H = Gx$. Da Gx abgeschlossen und G linear reduktiv ist, läßt sich f_0 zu einer Semiinvariante f auf V fortsetzen. Der Charakter zu f ist χ .

2. Falls die generische Bahn nicht abgeschlossen ist, braucht es allerdings keine Semiinvariante zum Charakter χ zu geben, z.B. $G := k^*$ und $V := k$. Auch wenn die generische Bahn abgeschlossen, aber die generische Standgruppe unendlich ist, gibt es im allgemeinen keine solche Semiinvariante: Sei G die orthogonale Gruppe $O(n)$ mit $n \geq 3$ ungerade und $V := k^n$ die definierende Darstellung. Dann ist χ nicht trivial. Der $SO(n)$ -Invariantenring wird von der invarianten quadratischen Form erzeugt. Also ist jede $SO(n)$ -Invariante auch $O(n)$ -invariant, insbesondere gibt es keine Semiinvarianten zu einem nichttrivialen Charakter.

Beweis von Satz 4: Sei zunächst die generische Bahn abgeschlossen. Bezüglich des Quotienten $\bar{\pi} : V \rightarrow \bar{Y} := V//S$ enthält V keinen Divisor vom Typ III (Satz 6b)). Da \bar{Y} faktoriell ist, ist $\omega_{\bar{Y}}$ und daher auch $\bar{\pi}^* \omega_{\bar{Y}}$ ein Geradenbündel. Also kann man den kanonischen Morphismus $\bar{\pi}^* \omega_{\bar{Y}_{\text{reg}}} = \bar{\pi}^* \bigwedge^{\bar{d}} \Omega_{\bar{Y}_{\text{reg}}} \rightarrow \bigwedge^{\bar{d}} \Omega_{\bar{\pi}^{-1}(\bar{Y}_{\text{reg}})}$ (mit $\bar{d} := \dim \bar{Y}$) auf ganz V fortsetzen. Der kleinste Grad eines Elements aus $\bigwedge^{\bar{d}} \Omega_V$ ist d . Dies liefert $q_{\bar{Y}} \geq d = \dim V//S$. Der kleinste Grad eines Elements in $\bar{\Theta} \otimes_k \omega_{\bar{Y}}$ ist $q_{\bar{Y}}$. Aus Satz 6d) folgt daher $q_Y \geq q_{\bar{Y}}$ und damit $q_Y \geq \dim V//S$.

Sei jetzt V eine beliebige Darstellung von G . Nach [8] gibt es eine offene Teilmenge Y^0 von Y , so daß $\pi^{-1}(Y^0) \rightarrow Y^0$ ein étales Faserbündel ist. Sei $x \in \pi^{-1}(Y^0)$ ein Punkt mit abgeschlossener Bahn und $H := G_x$ seine Standgruppe. Weiter sei $W := V^H$ der Fixraum und $N := N_G(H)$ der Normalisator von H . Dann sind H und N wieder reduktiv. Aus dem Theorem von Luna und Richardson [9] folgt, daß Y kanonisch isomorph zu $W//N$ ist und daß die generische Bahn von N in W abgeschlossen ist. Sei S der halbeinfache Teil von N . Dann ist $q_Y \geq \dim W//S \geq \dim W//N = \dim V//G$.

Sei nun $q_Y = \dim Y = d$. Dann steht bei den Ungleichungen

$$\dim Y \leq \dim \bar{Y} \leq q_{\bar{Y}} \leq q_Y$$

überall Gleichheit ($\bar{Y} = W//S$). Wir haben oben gesehen, daß es einen Morphismus $\Phi : \bar{\pi}^* \omega_{\bar{Y}} \rightarrow \bigwedge^d \Omega_W = \bigwedge^d W^* \otimes_k \mathcal{O}_W$ gibt. Wo $\bar{\pi}$ glatt ist, ordnet Φ einem Punkt x die Plückerkoordinaten von $(\ker d\bar{\pi}_x)^\perp \subseteq W^*$ zu. Sei nun w ein homogener Erzeuger von $\omega_{\bar{Y}}$. Dann

ist $\Phi(\bar{\pi}^*(w))$ eine S -invariante homogene d -Form auf W mit dem Grad $q_{\bar{Y}} = d$ und damit konstant. Daraus folgt, daß der Raum $U := \ker d\bar{\pi}_x \subseteq W$ unabhängig vom generischen Punkt x ist. Daher faktorisiert $\bar{\pi}$ durch $W \rightarrow W/U$. Wegen $\dim \bar{Y} = \dim W/U$, und da $\bar{\pi}$ zusammenhängende Fasern hat, ist $W/U \rightarrow \bar{Y}$ birational und surjektiv, also ein Isomorphismus (Lemma 1). Da die generische Bahn auf W abgeschlossen ist, ist $U = 0$ und S operiert trivial auf W . Wegen $\dim Y = \dim \bar{Y}$ operiert auch N^0 trivial. Nach Korollar 2 ist dann $(\pi_*\omega_W)^N = \omega_Y$. Also gibt es eine N -invariante d -Form mit Grad d auf W , d.h. N operiert unimodular auf W . Daraus folgt insbesondere, daß Y Gorenstein ist. Da der Morphismus $W \rightarrow Y$ endlich ist, ist der Schnitt von W mit jeder Faser von π endlich. Daraus folgt $\dim \pi^{-1}(y) \leq \dim V - \dim Y$, d.h. π ist äquidimensional. Dann gibt es aber wieder einen Morphismus $\pi^*\omega_Y \rightarrow \bigwedge^d \Omega_V$, und wie oben folgt, daß π durch $V \rightarrow V/U'$ faktorisiert, so daß $V/U' \rightarrow Y$ endlich ist. Daher gibt es keine nichtkonstanten Invarianten auf U' , G^0 operiert trivial und G/G^0 unimodular auf V/U' . \square

Bemerkung: Wenn die generische Bahn nicht abgeschlossen ist, gilt im allgemeinen nicht $q_Y \geq \dim V//S$: Sei $G := k^*$ und $V := k$. Dann ist $q_Y = 0$, aber $\dim V//S = 1$.

Eine weitere Anwendung von Korollar 1 ist

KOROLLAR 4. *Sei V eine Darstellung der halbeinfachen Gruppe G . Der Invariantenring werde von einem homogenen Polynom f erzeugt. Sei $s := s(f^{-1}(0)) - s(V)$. Dann gilt $\deg f \leq \frac{\dim V}{s+1}$. Für Gleichheit ist notwendig, daß die generische Standgruppe endlich ist.*

Beweis: λ werde von a erzeugt. Da G halbeinfach ist, ist a invariant. Es gilt $\deg a \leq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn die generische Standgruppe endlich ist (vgl. [6] Kor. 4). Weiter gilt $\deg D_\mu \geq \deg D_s \geq s \deg f$. Weil ω_V (bzw. ω_Y) von einem Element vom Grad $\dim V$ (bzw. $\deg f$) erzeugt wird, folgt $\deg f \leq \dim V - \deg a - s \deg f \leq \dim V - s \deg f$, und daraus die Behauptung. \square

Literatur

1. J.-F. Boutot, Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs. *Inv. Math.* **88** (1987), 65–68
2. R. Hartshorne, Stable reflexive sheaves. *Math. Ann.* **254** (1980), 121–176
3. J. Herzog und E. Kunz (Hg.), „Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings“. SLN **238** (1971), Springer Berlin-Heidelberg-New York
4. M. Hochster and J. Roberts, Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay. *Adv. in Math.* **13** (1974), 115–175
5. G. Kempf, The Hochster-Roberts theorem in invariant theory. *Mich. Math. J.* **26** (1979), 19–32
6. F. Knop, Über die Glattheit von Quotientenabbildungen. *manuscr. math.* **56** (1986), 419–427
7. F. Knop und P. Littelmann, Der Grad erzeugender Funktionen von Invariantenringen. *Math. Z.* **196** (1987), 211–231
8. D. Luna, Slices étales. *Bull. Soc. Math. France, Mem.* **33** (1973), 81–105
9. D. Luna and R. W. Richardson, A generalization of the Chevalley restriction theorem. *Duke Math. J.* **46** (1979), 487–496
10. V. L. Popov, The constructive theory of invariants. *Math. USSR Izv.* **19** (1982), 359–376
11. M. Raynaud et L. Gruson, Critères de platitude et de projectivité. Techniques de «platification» d’un module. *Inv. Math.* **13** (1971), 1–89
12. R. Stanley, Hilbert functions of graded algebras. *Adv. Math.* **28** (1978), 57–83
13. R. Stanley, “Combinatorics and commutative algebras”. Prog. in Math. **41** (1983), Birkhäuser Boston-Basel
14. K. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein I. *Osaka J. of Math.* **11** (1974), 1–8