

Über die Automorphismengruppe von Fahnenvarietäten

Friedrich Knop

Ziel dieser Note ist es, auf zwei Fehler in der Arbeit [3] von M. Demazure mit dem Titel “Automorphismes et déformations des variétés de Borel” hinzuweisen und diese richtigzustellen.

Ich beziehe mich im folgenden auf die Bezeichnungen in [3].

1. Die dominante kurze Wurzel θ' von G_2 ist $2\alpha_1 + \alpha_2$ und nicht wie angegeben $\alpha_1 + \alpha_2$. Damit ist $E_{\theta'}/E_{\theta''}$ dreidimensional und man kann dann folgendes Lemma aus [2] anwenden:

Lemma. *Sei $\varrho : B \rightarrow \mathrm{Gl}(E)$ eine Darstellung und $\mu \in X(B)$ ein Gewicht mit $\langle \alpha^\vee, \mu \rangle = -1$ für eine einfache Wurzel α , sodaß sich $E \otimes k_{-\mu}$ zu einer Darstellung von P_α fortsetzen läßt. Dann gilt $H^*(G/B, \mathcal{V}(E)) = 0$.*

Wie man leicht nachrechnet ist die Bedingung der Fortsetzbarkeit immer außer für $\mathrm{char} k = 3$ erfüllt. Damit kommen wir zum zweiten Punkt.

2. Sei G eine einfache algebraische Gruppe vom adjungierten Typ mit inhomogenem Wurzelsystem (d.h. B_n, C_n, F_4, G_2) und θ bzw. θ' sei die dominante lange bzw. kurze Wurzel. Setze $c := \|\theta\|^2/\|\theta'\|^2$.

Im Beweis von prop.2 wird ein G -Isomorphismus zwischen $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie} G$ und $H^0(G/B, \mathcal{L}_\theta)$ konstruiert. Ein solcher kann allerdings für $\mathrm{char} k = c$ nicht bestehen, wie folgende Tabelle zeigt. Sie zeigt die G -Modulstruktur von $H^0(\mathcal{L}_\theta)$, \mathfrak{g} und $H^0(\mathcal{L}_{\theta'})$, wenn $\mathrm{char} k = c$ ist.

G	$H^0(\mathcal{L}_\theta)$	\mathfrak{g}	$H^0(\mathcal{L}_{\theta'})$
B_n	$n \equiv 0(2)$	$[\theta][0][\theta'][0]$	$[\theta'][0][\theta][0]$
	$n \equiv 1(2)$	$[\theta][\theta'][0]$	$[\theta']([\theta] \oplus [0])$
C_n	$n \equiv 0(2)$	$[\theta][0][\theta'][0]$	$[\theta'][0][\theta][0]$
	$n \equiv 1(2)$	$[\theta]([\theta'] \oplus [0])$	$[\theta'][\theta][0]$
F_4		$[\theta][\theta']$	$[\theta']$
G_2		$[\theta][\theta']$	$[\theta']$

Dabei bezeichnen wir den irreduziblen G -Modul zu einem höchsten Gewicht χ mit $[\chi]$, und $[\chi_1][\chi_2]\cdots$ bedeutet, daß der betreffende Modul genau einen irreduziblen Untermodul $\cong [\chi_1]$ hat, modulo diesem wieder genau einen $\cong [\chi_2]$ usw. Der Modul $[\chi_1]([\chi_2] \oplus [\chi_3])$ hat genau drei echte Untermoduln $\neq 0$: $[\chi_1]$, $[\chi_1][\chi_2]$ und $[\chi_1][\chi_3]$. Die Angaben über $H^0(\mathcal{L}_\theta)$ und \mathfrak{g} kann man [4] entnehmen, wenn man berücksichtigt, daß $H^0(\mathcal{L}_\theta)^*$ zur Liealgebra der universellen Überlagerung von G isomorph ist. Dies liegt daran, daß beide Moduln von einem Höchstgewichtsvektor erzeugt werden, die gleiche Dimension haben und $H^0(\mathcal{L}_\theta)^*$ bekanntlich der universelle Höchstgewichtsmodul zum Gewicht θ ist.

Der Fehler in [3] steckt in Lemma 1b). Dort muß es richtig heißen: $\mathfrak{g}_{-\alpha}u = 0$, $\mathfrak{g}_{-\alpha}v \neq 0$ statt $\mathfrak{g}_\alpha u \neq 0$, $\mathfrak{g}_\alpha v = 0$, denn \mathfrak{g}_α liegt gar nicht in $\mathrm{Lie} B$. Damit muß am Ende des Abschnitts 5) nicht $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{\theta''}] \neq 0$, sondern $[\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{\theta'}] \neq 0$ sein, was eben für $\mathrm{char} k = c$ nicht stimmt.

Ich werde nun zeigen, daß das Hauptergebnis der Arbeit trotzdem immer wahr ist. Sei also ab jetzt $\mathrm{char} k = c$. Dann zerfällt $E_{\theta'}/E_{\theta''}$ in zwei Summanden und man erhält:

$$H^0(\mathcal{E}_{\theta'}/\mathcal{E}_{\theta''}) \cong H^0(\mathcal{L}_{\theta'}); \quad H^1(\mathcal{E}_{\theta'}/\mathcal{E}_{\theta''}) \cong H^1(\mathcal{L}_{\theta''}) \cong H^0(\mathcal{L}_{\theta'}).$$

Der letzte Isomorphismus folgt dabei aus [1] Cor.3.2ii). Dies liefert die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_{\theta'}) \longrightarrow H^0(\mathcal{T}_{G/B}) \xrightarrow{\eta} H^0(\mathcal{L}_\theta) \xrightarrow{\delta} H^0(\mathcal{L}_{\theta'}) \longrightarrow H^1(\mathcal{T}_{G/B}) \longrightarrow 0$$

(Es genügt den Fall $P = B$ zu behandeln.) Prop.2 in [3] ist richtig, wenn δ surjektiv ist.

Wir nehmen also an, daß dies nicht der Fall ist. Dann lehrt ein Blick auf die Tabelle oben, daß dann sogar $\delta = 0$ gelten muß, d. h. η ist surjektiv. Wir wissen weiterhin, daß \mathfrak{g} ein Untermodul von $H^0(\mathcal{T}_{B/B})$ ist. Sei nun $\mathfrak{z} := \{\sigma \in H^0(\mathcal{T}_{G/B}) \mid \sigma(1) = 0\}$. Dann gilt $H^0(\mathcal{T}_{G/B})/\mathfrak{z} = \mathcal{T}_{G/B,1} = \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ und damit:

- i) \mathfrak{z} ist B -stabil;
- ii) $H^0(\mathcal{T}_{G/B}) = \mathfrak{z} + \mathfrak{g}$;
- iii) $\mathfrak{b} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}$.

Für einen T -Modul V sei V_χ der zum Gewicht χ gehörende Gewichtsraum. Dann gilt $H^0(\mathcal{L}_{\theta'})_{\theta'} = \mathfrak{g}_{\theta'} \cong k$. Wegen ii) gibt es also ein $v \in \mathfrak{z}_{\theta'}$ mit $\eta(v) \neq 0$. Mit $\mathfrak{g}_{-\alpha} = kX_{-\alpha}$ rechnet man leicht nach, daß $X_{-\alpha}^{c-1}H^0(\mathcal{L}_\theta)_{\theta'} \neq 0$ ist, und damit liegt wegen i) auch $H^0(\mathcal{L}_\theta)_\theta$ in $\eta(\mathfrak{z})$, d.h. $H^0(\mathcal{T}_{G/B})_\theta \subseteq \mathfrak{z}$. Es gilt aber auch $H^0(\mathcal{T}_{G/B})_\theta \subseteq \mathfrak{g}$ im Widerspruch zu iii).

Damit ist prop.2 aus [3] in jeder Charakteristik gültig.

Literatur:

- [1] H. H. Andersen: *The first cohomology group of a line bundle on G/B* . Inv. Math. **51** (1979), 287–296.
- [2] M. Demazure: *A very simple proof of Bott's Theorem*. Inv. Math **33** (1976), 271–272.
- [3] M. Demazure: *Automorphismes et déformations de variétés de Borel*. Inv. Math. **39** (1977), 179–186.
- [4] G. M. D. Hogeweij: *Almost-classical Lie algebras I*. Indag. math. **44** (1982), 441–452.

Friedrich Knop
 Mathematisches Institut
 der Universität Basel
 Rheinsprung 21
 CH-4051 Basel