Arch. Math., Vol. 41, 438–446 (1983)

0003-889X/83/4105-0438 $ 3.30/0


# Mehrfach transitive Operationen algebraischer Gruppen

Von

FRIEDRICH KNOP

In dieser Arbeit werden alle algebraischen Gruppen bestimmt, die über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k$ definiert sind und die auf den rationalen Punkten einer Varietät biregulär und zweifach transitiv operieren. Diese Aufgabe ist schon von Tits für Liegruppen, insbesondere also für $k = \mathbb{C}$ gelöst worden ([8]). Daher liegt das Augenmerk dieser Arbeit auf den Körpern positiver Charakteristik. Das Haupthilfsmittel ist dabei eine Invariante, die im Prinzip in [1] definiert worden ist und in der Regel gleich der Euler-Poincaré Charakteristik sein dürfte. Auch wenn sie wesentlich nur im Punkt 9 des Beweises von Satz 2 gebraucht wird, ist sie auch an weiteren Stellen sehr nützlich. Das Endergebnis der Klassifikation ist im wesentlichen das gleiche wie im komplexen Fall, und nur für char $k = 2$ kommt noch eine Gruppe hinzu. Als Teil des Hauptergebnisses werden alle Gruppen bestimmt, die auf einer Vektorgruppe operieren und dabei transitiv auf den von Null verschiedenen Elementen wirken (Satz 1).

*Bezeichnungen.* Alle Varietäten sind im folgenden über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k$ beliebiger Charakteristik $p$ definiert. Varietäten brauchen nicht irreduzibel zu sein. Reduktive Gruppen sind zusammenhängend.

**1.** Sei $M$ eine Varietät und $M = \bigcup_{i=1}^{r} M_i$ eine disjunkte Zerlegung von $M$ in endlich viele Untervarietäten $M_i$, die alle zu einem affinen Raum $\mathbf{A}^{n_i}$ isomorph sind. Dann hängt nach [1] Th. 4.5 die Anzahl $b_{2m}$ der $i$ mit $\dim M_i = n_i = m$ nur von $M$ und nicht von der Zerlegung $(M_i)$ ab. Ist $M$ außerdem noch projektiv, so gilt $b_{2m} \geqq 1$ für $m = 1, \ldots, \dim M$ ([1] Prop. 4.7). Insbesondere ist $r$ eine Invariante von $M$, die im folgenden mit $\chi(M)$ bezeichnet wird. Für projektive $M$ gilt die Ungleichung:

$$(1) \qquad \chi(M) \geqq \dim M + 1\,.$$

Sei nun $U$ eine unipotente zusammenhängende Gruppe, die auf der Varietät $M$ operiert. Nach [3] IV, § 4.3.16 ist jede Bahn von $U$ in $M$ isomorph zu einem affinen Raum. Gibt es also nur endlich viele Bahnen, so definiert dies eine Zerlegung wie oben und $\chi(M)$ ist einfach die Anzahl der Bahnen.

Konkret ist jeder projektive homogene Raum einer reduktiven Gruppe $G$ von dieser Art: Seien $T$ ein maximaler Torus, $B$ eine $T$ enthaltende Boreluntergruppe,

$W$ die Weylgruppe und $D$ das System einfacher Wurzeln bezüglich $B$. Für $I \subseteqq D$ bezeichne $W_I$ die Untergruppe von $W$, die von den $s_\alpha$ mit $\alpha \in I$ erzeugt wird. Dann ist $P_I := \bigcup_{w \in W_I} UwB$ eine parabolische Untergruppe von $G$ und jede parabolische Untergruppe ist zu einem $P_I$ mit eindeutig bestimmtem $I$ konjugiert. $U$ operiert dann auf $G/P_I$ mit endlich vielen Bahnen und zwar gilt:

$$G/P_I = \bigcup_{w \in W/W_I} U\bar{w}. \tag{2}$$

Dabei bezeichnet $\bar{w}$ die Nebenklasse $wP_I$. Insbesondere gilt:

$$\chi(G/P_I) = [W : W_I]. \tag{3}$$

Die eindimensionalen Bahnen sind dabei genau die $\overline{Us_\alpha}$ mit $\alpha \notin I$, also:

$$b_2(G/P_I) = |D \backslash I| \tag{4}$$

(Einzelheiten stehen z.B. in [6] oder [7]).

In der Tabelle ist $G$ eine lokaleinfache Gruppe und $P_i := P_I$ mit $I = D \backslash \{\alpha_i\}$.

Mit Hilfe dieser Tabelle lassen sich nun leicht alle $G/P_I$ bestimmen, für die in der Ungleichung (1) Gleichheit auftritt:

**Lemma.** *Sei $G$ eine reduktive Gruppe, die auf der projektiven homogenen Varietät $M := G/P_I$ mit höchstens endlichem Kern wirkt. Falls $\chi(M) = \dim M + 1$ gilt, so tritt einer der folgenden Fälle ein:*

a) *$G$ ist vom Typ $A_n$, $I = D\backslash\{\alpha_1\}$ oder $I = D\backslash\{\alpha_n\}$* $\dim M = n$.

b) *$G$ ist vom Typ $B_n$ oder $C_n$, $I = D\backslash\{\alpha_1\}$* $\dim M = 2n - 1$.

c) *$G$ ist vom Typ $G_2$, $I = D\backslash\{\alpha_1\}$ oder $I = D\backslash\{\alpha_2\}$* $\dim M = 5$.

Beweis. Wegen $\chi(M) = \dim M + 1$ muß $b_{2m} = 1$ sein für $m = 1 \ldots \dim M$. Also ist nach (4) $I$ von der Form $D\backslash\{\alpha\}$, und das Dynkindiagramm von $G$ ist zusammenhängend, weil sonst $I$ eine ganze Zusammenhangskomponente und damit $P_I$ einen unendlichen Normalteiler enthalten würde. Alle Möglichkeiten für $G$ und $P_I$ sind also in der Tabelle aufgeführt und lassen sich nun Fall für Fall überprüfen: Für die Ausnahmegruppen $G_2$ bis $E_8$ läßt sich das Ergebnis sofort aus der Tabelle ablesen. In den Fällen $A_n$ bis $D_n$ sind einige einfache Abschätzungen nötig, die ich hier nur für den schwierigsten Fall durchführen werde:

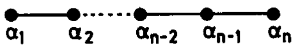
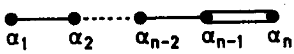
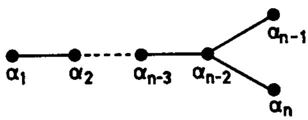
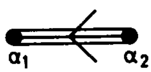
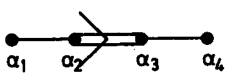
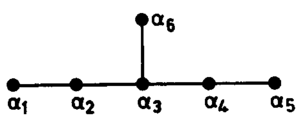
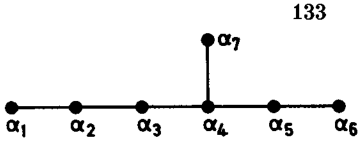
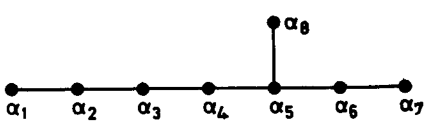
Sei $G$ vom Typ $B_n$ oder $C_n$ und $I = D\backslash\{\alpha_i\}$. Dann tritt entweder der Fall b) des Lemmas ein oder es gilt: $n \geqq 3$ und $i \neq 1$.

$$i = n: \ \chi(M) - \dim M - 1 = 2^n - \tfrac{1}{2} n(n+1) - 1 \neq 0.$$

$$2 \leqq i \leqq n-1: \ \dim M = \frac{i}{2}(4n + 1 - 3i) \leqq \frac{1}{24}(4n+1)^2.$$

Für $i \neq n - 1$ gilt $\chi(M) = 2^i \binom{n}{i} \geqq 2^2 \binom{n}{2} = 2n^2 - 2n$ und ebenfalls für

$$i = n - 1: \ \chi(M) = 2^{n-1} n \geqq 2n^2 - 2n$$

| Typ von $G$ | Dynkin-diagramm | $\dim G$ | $\lvert W\rvert$ | $i$ | $\dim G/P_i$ | $\chi(G/P_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_n$ |  | $n^2+2n$ | $(n+1)!$ | $1,\ldots,n$ | $i(n+1-i)$ | $\binom{n+1}{i}$ |
| $B_n, C_n$ |  | $2n^2+n$ | $2^n n!$ | $1,\ldots,n$ | $\frac{i}{2}(4n+1-3i)$ | $2^i\binom{n}{i}$ |
| $D_n$ |  | $2n^2-n$ | $2^{n-1}n!$ | $1,\ldots,n-2$ | $\frac{i}{2}(4n-1-3i)$ | $2^i\binom{n}{i}$ |
| | | | | $n-1, n$ | $\frac{1}{2}n(n-1)$ | $2^{n-1}$ |
| $G_2$ |  | 14 | 12 | 1, 2 | 5 | 6 |
| $F_4$ |  | 52 | 1152 | 1, 4 | 15 | 24 |
| | | | | 2, 3 | 20 | 96 |
| $E_6$ |  | 78 | 51840 | 1, 5 | 16 | 27 |
| | | | | 2, 4 | 25 | 216 |
| | | | | 3 | 29 | 720 |
| | | | | 6 | 21 | 72 |
| $E_7$ |  | 133 | 2903040 | 1 | 27 | 56 |
| | | | | 2 | 42 | 756 |
| | | | | 3 | 51 | 4042 |
| | | | | 4 | 53 | 10080 |
| | | | | 5 | 47 | 2016 |
| | | | | 6 | 33 | 126 |
| | | | | 7 | 42 | 576 |
| $E_8$ |  | 248 | 696729600 | 1 | 57 | 240 |
| | | | | 2 | 83 | 6720 |
| | | | | 3 | 97 | 60480 |
| | | | | 4 | 104 | 241920 |
| | | | | 5 | 106 | 483840 |
| | | | | 6 | 98 | 69120 |
| | | | | 7 | 78 | 30240 |
| | | | | 8 | 92 | 138240 |

also:

$$\chi(M) - \dim M - 1 \geqq 2n^2 - 2n - \frac{1}{24}(4n+1)^2 - 1$$

$$= \frac{4}{3}\left[\left(n - \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{99}{64}\right] > 0.$$

Die Fälle $A_n$ und $D_n$ werden analog behandelt.

Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich nun dieser Satz beweisen:

**Satz 1.** *Sei $V$ eine nichttriviale zusammenhängende algebraische Gruppe, und $G$ eine algebraische Gruppe von Automorphismen von $V$, die transitiv auf $V \setminus \{e\}$ operiert. Dann ist $V$ $G$-isomorph zu einem $k$-Vektorraum, auf dem $G$ linear wirkt. Außerdem gilt für $G$ ($S \cong \mathbb{G}_m$ ist die Gruppe der Skalare auf dem Vektorraum $V$):*

i) $G = S$, *falls* $\dim V = 1$.

ii) *Sei* $n := \dim V \geqq 2$. *Dann ist* $G = \bar{S} \cdot \bar{G}$, *wobei* $\bar{S}$ *eine Untergruppe von* $S$ *und* $\bar{G}$ *eine der folgenden Gruppen ist:*

   a) $Sl_n$.

   b) $Sp_n$ (*$n$ gerade*).

   c) $\operatorname{Im} \varphi$, *dabei ist* char $k = 2$, $n = 6$ *und* $\varphi \colon G_2 \to Gl_6$ *die irreduzible Darstellung mit höchstem Gewicht* $\lambda_1$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, daß alle Elemente aus $V \setminus \{e\}$ dieselbe Ordnung haben. Daher kann $V$ keinen Torus enthalten und ist somit unipotent ([3] IV, § 2.3.11). Weil $V$ als unipotente Gruppe ein nichttriviales Zentrum besitzt, muß dieses mit $V$ zusammenfallen, d.h. $V$ ist kommutativ. Dies genügt, um zu zeigen, daß $V$ eine Vektorgruppe ist: Für char $k = 0$ folgt dies aus der Existenz der Exponentialfunktion und für char $k > 0$ aus [6] 20.2 und 20.4.

Der nächste Schritt ist es zu zeigen, daß die Wirkung von $G$ auf $V$ linear ist. Für char $k = 0$ ist dies wieder klar, da $G$ auf $V$ genauso operiert wie auf Lie $V$ ([3] IV, § 2.4.2). Sei also char $k = p > 0$. Setze $A := \operatorname{Hom}(V, \mathbb{G}_a)$. Dies ist ein Untermodul des Raumes aller regulären Funktionen und damit ein rationaler $G$-Modul, d.h. Vereinigung seiner endlichdimensionalen Untermoduln. Wählt man Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ in der Vektorgruppe $V$, so ist jedes Element von $A$ ein $p$-Polynom, d.h. eine Linearkombination von $x_i^{p^r}$ ($r \geqq 0$) ([6] 20.3). Weiterhin ist $A_r := \{f^{p^r} \in A \mid f \in A\}$ ein Untermodul von $A$ und es gilt: $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ und $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = 0$. $A/A_1$ ist dual zu Lie $V$. Sei nun $0 \neq U \subset A$ ein endlichdimensionaler Untermodul von $A$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $U \cap A_k \neq 0$ aber $U \cap A_{k+1} = 0$, und

$$W := \{f \in A \mid f^{p^k} \in U \cap A_k\}$$

ist ein nichttrivialer Untermodul von $A$ mit $W \cap A_1 = 0$. Die Abbildung $\psi \colon V \to \check{W}$: $v \mapsto (f \mapsto f(v))$ ist ein $G$-äquivarianter Homomorphismus von $V$ in den linearen Dualraum von $W$. Weil $G$ nach Konstruktion linear auf $\check{W}$ operiert, genügt es zu zeigen, daß $\psi$ ein Isomorphismus ist. Zunächst ist $d\psi$: Lie $V \to$ Lie $\check{W}$ dual zu dem injektiven Homomorphismus $W \hookrightarrow A \to A/A_1$. Also ist $d\psi$ surjektiv und nach [3] II, § 5.5.3 ist $\psi$ selber surjektiv und glatt. Da außerdem der Kern von $\psi$ $G$-invariant und damit trivial ist, folgt die Behauptung.

Es bleibt zu zeigen, daß $G$ die angegebene Gestalt hat. Für $n = 1$ ist alles klar. Sei also ab jetzt $n = \dim V \geqq 2$. Weil die Zusammenhangskomponente der Eins $G^0$ von $G$ auch transitiv auf $V \setminus \{e\}$ operiert, induziert die Projektion $Gl_n \to PGl_n$ einen surjektiven Homomorphismus auf eine der Gruppen aus dem Lemma (denn $\chi(\mathbf{P}^{n-1}) = n$). Da diese Gruppen kommutatorgleich sind, ist auch die Einschränkung der Projektion auf die Kommutatorgruppe $(G^0)' =: \bar{G}$ surjektiv und wegen $\bar{G} \subseteq Sl_n$ ist der Kern endlich. Also ist $\bar{G}$ selber eine der Gruppen aus dem Lemma und $V$ isomorph zum irreduziblen Modul $M_\lambda$ mit einem höchsten Gewicht $\lambda$. Außerdem wissen wir, daß der Eigenraum zu diesem von $P_{D\setminus\{\alpha_i\}}$ stabilisiert wird, was bedeutet, daß $\lambda$ ein Vielfaches von $\alpha_i$ sein muß: $\lambda = m\alpha_i$. Weiterhin sieht man leicht, daß alle Gewichte von $V$ unter der Weylgruppe konjugiert sein müssen. Weil dann alle Gewichte durch $m$ teilbar sind, hat $G$ die Fundamentalgruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\operatorname{rg} G}$. Dies ist nur möglich für $m = 1$ oder für $\operatorname{rg} G = 1$ und $m = 2$. Im zweiten Fall ist aber $G = PSl_2$ und die Darstellung $M_{2\lambda}$ ist entweder nicht treu $(p = 2)$ oder nicht transitiv auf $V\setminus\{e\}$ $(p \neq 2)$. Also ist $m = 1$. Als weitere Einschränkung muß $\dim \bar{G}/P_i = \dim M_{\lambda_i} + 1$ gelten. Dies ist für $\bar{G} = A_n$ oder $\bar{G} = C_n$ in jeder Charakteristik von $k$ erfüllt und ergibt die Fälle a) und b). Für $p \neq 2$ gilt dies weder für $\bar{G} = B_n$ $(\dim M_{\lambda_1} = 2n + 1)$ noch für $\bar{G} = G_2$ $(\dim M_{\lambda_1} = 7$, $\dim M_{\lambda_2} = 14$ $(p \neq 3)$ bzw. 7 $(p = 3))$. Sei also $p = 2$. Dann ist die Wirkung von $B_n$ auf $M_{\lambda_1}$ nicht effektiv (sie faktorisiert durch $C_n$). Für $\bar{G} = G_2$ gilt tatsächlich $\dim M_{\lambda_1} = 6$ (dies ist Fall c)), aber $\dim M_{\lambda_2} = 14$. Weil nun in den Fällen a) bis c) $\bar{G}$ transitiv auf $\mathbf{P}(V)$ wirkt, gilt dies auch für $V$. Andernfalls wäre die Bahn eines Vektors $v \neq 0$ eine endliche Überlagerung des projektiven Raumes und damit selbst projektiv. Dies ist aber unmöglich, da sie in dem affinen Raum $V$ liegt. $G$ ist also eine beliebige Gruppe, die zwischen $\bar{G}$ und dem Normalisator von $\bar{G}$ in der $Gl_n$ liegt. Dieser ist aber genau $S \cdot \bar{G}$: Im Fall a) ist das klar. In den Fällen b) und c) besitzt $\bar{G}$ keine äußeren Automorphismen. Die Behauptung folgt dann aus dem Schurschen Lemma. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

**Korollar.** *Die algebraische Gruppe $G$ operiere effektiv und transitiv auf dem projektiven Raum $\mathbf{P}^{n-1}$. Dann ist $G$ isomorph zu $PSl_n$, $PSp_n$ ($n$ gerade) oder $G_2$* (char $k$ $= 2$ *und* $n = 6$).

Beweis. Man kann $G$ als Untergruppe von $PGl_n = \operatorname{Aut}(\mathbf{P}^{n-1})$ auffassen. Dann operiert das Urbild $H$ von $G$ in der $Gl_n$ transitiv auf $k^n\setminus\{e\}$. Damit ist $G$ eine der Gruppen von Satz 1 modulo ihrem Zentrum, also eine der angegebenen Gruppen.

2. Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieser Arbeit.

**Satz 2.** *Die algebraische Gruppe $G$ operiere effektiv und zweifach transitiv auf der Varietät $M$ mit $m := \dim M \geq 1$. Dann ist entweder*

a) $M = \mathbf{P}^m$ *und* $G = PGl_{m+1}$ *oder*

b) $M = \mathbf{A}^m$ *und* $G = L \rtimes V$, *dabei ist* $V = \mathbf{G}_a^m$ *eine Vektorgruppe und $L$ eine Gruppe, die transitiv auf $V\setminus\{e\}$ operiert (d.h. eine der Gruppen aus Satz 1). Man kann $M$ mit $V$ identifizieren und die Wirkung von $G$ auf $M$ schreibt sich dann:* $(A, t)(v) = Av + t$ $(A \in L,\ v, t \in V)$.

Beweis. 1. Für $x \in M$ sei $G_x$ die Standgruppe von $x$ in $G$. Die zweifache Transitivität von $G$ drückt sich dann so aus:

$$G = G_x \cup G_x g G_x \quad \text{mit} \quad g \notin G_x.$$

Daraus folgt sofort: $G_x$ ist eine maximale Untergruppe von $G$. Jeder Normalteiler von $G$ operiert auch transitiv auf $M$. Das Zentrum von $G$ ist trivial.

Wegen der letzten Bemerkung ist $G$ eine affine algebraische Gruppe ([3] III, § 3.8.4).

2. $M$ ist wegen der zweifachen Transitivität von $G$ glatt und zusammenhängend. Außerdem operiert $G_x$ und damit auch $G_x^0$ transitiv auf $M \setminus \{x\}$. Als Gruppenschema braucht $G_x^0$ nicht glatt zu sein. Sei daher $H := (G_x^0)^{\mathrm{red}}$ die $G_x^0$ zugrundeliegende algebraische Gruppe und entsprechend $S := (H_y)^{\mathrm{red}}$ für ein $y \in M \setminus \{x\}$. Damit hat man sich allerdings eingehandelt, daß der kanonische Morphismus $\varphi\colon H/S \to M \setminus \{x\}$: $h \mapsto hy$ zwar noch bijektiv aber nicht mehr unbedingt ein Isomorphismus ist.

3. Man bette nun $M$ so in einen projektiven Raum $\mathbf{P}^N$, auf dem ebenfalls $G$ operiert, ein, daß $M$ darin eine Bahn von $G$ bildet. Dies ist nach [3] II, § 2.3.5 möglich. $Y$ sei dann die Normalisierung des Abschlusses von $M$ in $\mathbf{P}^N$, und $\psi$ die Komposition der Morphismen $H/S \to M \setminus \{x\} \hookrightarrow M \hookrightarrow Y$. Weil dann nach Konstruktion $\psi$ injektiv insbesondere also quasiendlich ist, faktorisiert $\psi$ eindeutig in eine offene Einbettung $f$ und einen endlichen Morphismus $g$, $H/S \underset{f}{\to} Y' \underset{g}{\to} Y$ ([4] III, § 4.4.3). Dabei ist $Y'$ die Normalisierung von $Y$ im Funktionenkörper von $H/S$ und damit eine projektive, normale $H$-Varietät. Außerdem ist wegen der Bijektivität von $g$ der Punkt $g^{-1}(x)$ ein Fixpunkt von $H$ in $Y'$.

4. Definiere nun rekursiv: $P_0 := S$ und $P_{i+1} := N_H(R_u P_i)^0$. Dann gilt offenbar $P_i \subseteqq P_{i+1}$ und $R_u P_i \subseteqq R_u P_{i+1}$ und es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $R_u P_k = R_u P_{k+1}$. Setzt man nun $U := R_u P_k$, so ist $R_u(N_H U) = R_u P_{k+1} = U$ und damit $P_k$ parabolisch ([6] 30.3 B). Also haben wir eine parabolische Untergruppe $P$ von $H$ gefunden mit $S \subseteqq P$ und $R_u S \subseteqq R_u P$. Insbesondere ist dann $P/S$ eine affine Varietät ([2] 4.3 und 4.6).

5. Der folgende Hilfssatz, angewendet auf den Morphismus $H/S \to H/P$ und die Varietät $g^{-1}(M) \subseteqq Y'$, zeigt $\dim P/S = 1$ und damit $\dim H/P = m - 1$:

**Hilfssatz.** *Sei $V$ eine irreduzible Varietät, $x \in V$ und $\varphi\colon V \setminus \{x\} \to X$ ein affiner Morphismus mit irreduziblen Fasern konstanter Dimension $d$. Dann ist $d \leqq 1$.*

Beweis des Hilfssatzes. Sei $d \geqq 1$; Induktion nach $\dim X$.

$\dim X = 0$: Dann ist $X$ einpunktig, also nach Voraussetzung $V \setminus \{x\}$ affin. Komplemente affiner Mengen haben aber immer die Kodimension 1 ([5] Prop. 1) und damit folgt die Behauptung.

$\dim X \geqq 1$: Wähle eine affine offene Teilmenge $U$ von $X$. Nach dem eben zitierten Satz und der Voraussetzung hat jede Komponente von $V \setminus \varphi^{-1}(U)$ die Kodimension 1 insbesondere also positive Dimension. Sei nun $V'$ eine Komponente, die $x$ enthält, und $X' := \varphi(V' \setminus \{x\})$. Dann hat $X'$ kleinere Dimension als $X$ und die Behauptung folgt aus der Induktionsvoraussetzung für $V'$ und $X'$.

6. Sei nun $\sigma\colon \tilde{Y} \to Y$ die Aufblasung von $Y$ im Punkte $x$. Dann operiert $H$ auch auf $\tilde{Y}$, und $M \setminus \{x\}$ liegt als offene Teilmenge in $\tilde{Y}$. Weil $M$ glatt in $x$ ist, ist $\Sigma := \sigma^{-1}(x)$ isomorph zum $\mathbf{P}^{m-1}$. Im folgenden wird gezeigt, daß $H$ transitiv auf $\Sigma$ operiert. Dazu sei $H/S \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{Y}' \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{Y}$ die Faktorisierung von $H/S \to M \setminus \{x\} \hookrightarrow \tilde{Y}$ wie in Punkt 3,

und $\Sigma' := \bar{g}^{-1}(\Sigma)$. Da man $H/S$ als offene Teilmenge von $\bar{Y}'$ auffassen kann, definiert $H/S \to H/P$ einen rationalen Morphismus $\varphi\colon \bar{Y}' \to H/P$. Nun sind nach Konstruktion $H/P$ projektiv und $\bar{Y}'$ normal, was zur Folge hat, daß $\varphi$ außerhalb einer abgeschlossenen Teilmenge, deren Kodimension mindestens zwei ist, definiert ist. Insbesondere gibt es einen Punkt $z \in \Sigma'$, in dem $\varphi$ definiert ist. Sei $B$ die Bahn von $z$ unter $H$. Dann ist die Einschränkung $\varphi|_B\colon B \to H/P$ $H$-äquivariant und damit surjektiv. Weil andererseits $\dim B \leqq \dim \Sigma' = m - 1 = \dim H/P$ gilt, ist $\varphi|_B$ ein endlicher Morphismus und $B$ somit auch projektiv, $\dim B = m - 1$. Also fällt $B$ mit $\Sigma'$ zusammen. Mit anderen Worten: $H$ operiert transitiv auf $\Sigma'$ und damit auch auf $\Sigma$.

7. Nach Definition der Aufblasung kann man $\Sigma$ mit dem projektiven Raum identifizieren, der zum Tangentialraum $T$ von $M$ in $x$ gehört. Aus dem obigen Ergebnis folgt also, daß $H$ irreduzibel auf $T$ operiert. Sei nun $f_x\colon G \to M\colon g \mapsto gx$ und $df_x\colon \operatorname{Lie} G \to T$ die induzierte Abbildung. Da nun das Bild von $df_x$ ein $H$-invarianter Teilraum von $T$ ist, ist $df_x$ entweder identisch Null oder surjektiv. Der erste Fall kann aber nicht eintreten, weil sonst die Wirkung von $G$ auf $M$ durch den Frobeniusmorphismus faktorisieren würde. Also ist $df_x$ surjektiv und damit $G_x$ glatt.

8. Annahme: $G^0$ ist nicht reduktiv.

Dann ist $V := Z(R_u G)^0$ (die Einskomponente des Zentrums des unipotenten Radikals von $G$) ein nichttrivialer Normalteiler von $G$, der daher transitiv auf $M$ operiert (siehe 1). Da weiterhin $V$ abelsch ist, operiert $V$ sogar scharf transitiv auf $M$, d.h. man kann $V$ mit $M$ identifizieren und es gilt: $G_x \cap V = \{e\}$ und $G_x \cdot V = G$, also $G = G_x \rtimes V$. Zur zweifachen Transitivität von $G$ auf $M$ ist dabei äquivalent, daß $G_x$ durch Konjugation transitiv auf $V \backslash \{e\}$ operiert. Mit Hilfe von Satz 1 folgt nun Punkt b) aus dem Satz.

9. $G^0$ sei also ab jetzt reduktiv.

Annahme: $H$ ist auch reduktiv.

Dann ist $M$ affin ([2]) und somit $Y \backslash M \neq \emptyset$. Sei $X$ eine Komponente von $Y \backslash M$. Sie hat dann die Dimension $m - 1$ ([5]). Analog wie in 6. läßt sich zeigen, daß $H$ transitiv auf $X$ operiert. Weiter hat man folgende Kette $H$-äquivarianter bijektiver Morphismen: $X \xleftarrow{\bar{g}} \bar{g}^{-1}(X) \xrightarrow{\varphi} H/P \xleftarrow{\varphi} \Sigma' \xrightarrow{\bar{g}} \Sigma \cong \mathbf{P}^{m-1}$.

Also gilt nach den Bemerkungen am Anfang des ersten Abschnitts:

$$\chi(X) = \chi(\mathbf{P}^{m-1}) = m = \dim X + 1\,.$$

Nun beachte man, daß auf $X$ nicht nur $H$, sondern sogar $G^0$ operiert. Sei dabei $K$ der Kern der Wirkung von $G^0$ auf $K$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

i) $K$ hat positive Dimension: Da $G^0$ reduktiv ist, gilt $G^0 = L \cdot K$, wobei $L$ der Zentralisator von $K$ in $G^0$ ist. Weil $G_x \cap K$ von $L$ normalisiert wird, operiert $L$ auf den Fixpunkten von $G_x \cap K$ in $M$. Andererseits wirkt $L$ wie jeder Normalteiler transitiv auf $M$. Somit gilt $G_x \cap K = \{e\}$, d.h. die Operation von $K$ auf $M$ ist scharf transitiv. Wie in 8. müßte nun $G_x$ transitiv auf $K \backslash \{e\}$ operieren, was nach Satz 1 unmöglich ist.

ii) $K$ ist endlich: Da $G^0$ und $H$ transitiv auf $X$ operieren, erfüllen beide die Voraussetzungen des Lemmas aus dem ersten Abschnitt. Damit gibt es folgende Möglichkeiten:

α) $G^0$ ist vom Typ $A_{m-1}$, $H$ ist vom Typ $B_{m/2}$ oder $C_{m/2}$ ($m \geqq 4$ gerade);

β) $G^0$ ist vom Typ $A_5$, $H$ ist vom Typ $G_2$ ($m = 6$);

γ) $G^0$ ist vom Typ $B_3$ oder $C_3$ und $H$ ist vom Typ $G_2$ ($m = 6$).

In keinem dieser drei Fälle ist aber $\dim G^0 - \dim H = m$. Also kann $H$ nicht reduktiv sein.

10. Weil nun $G^0$ reduktiv und $G_x$ maximal aber nicht reduktiv ist, muß $G_x$ parabolisch sein ([6] 30.4). $M$ ist also projektiv. Weil $H$ auf der Fixpunktmenge von $R_u H$ in $M$ operiert, hat auch $R_u H$ in $M$ nur einen einzigen Fixpunkt: $x$. Alle anderen Bahnen sind also mindestens eindimensional. Dies bedeutet, daß $R_u H$ transitiv auf den Fasern von $H/S \to H/P$ operiert (man beachte, daß $R_u H$ in der parabolischen Untergruppe $P$ enthalten ist und damit trivial auf $H/P$ operiert). Also hat jede Gruppe, die $R_u H$ enthält, genauso viele Bahnen in $H/S$ wie in $H/P$. Dies trifft insbesondere für eine maximale unipotente Untergruppe von $H$ zu, und man erhält:

$$m = \chi(\mathbf{P}^{m-1}) = \chi(H/P) = \chi(H/S) = \chi(M \setminus \{x\}) = \chi(M) - 1,$$

also $\chi(M) = \dim M + 1$. Damit ist $G^0$ wieder eine der Gruppen aus dem Lemma:

a) $M$ ist in diesem Fall der projektive Raum $\mathbf{P}^m$ und $G \cong G^0 \cong PGl_{m+1} \cong \operatorname{Aut} \mathbf{P}^m$. $G$ operiert tatsächlich zweifach transitiv.

b) $M$ ist in diesem Fall eine Quadrik oder ein symplektischer Raum. Daher läßt $G_x$ die Polare $x^\perp$ invariant: Die Wirkung ist nicht zweifach transitiv.

c) Es läßt sich leicht zeigen, daß die Doppelnebenklassen einer parabolischen Untergruppe $P_I$ in $G$ genau denen von $W_I$ in $W$ entsprechen. In unserem Fall ($G = G_2$) ist $W$ die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Sechsecks und $W_I$ die Standgruppe einer Ecke bzw. einer Kante. Also gibt es mehr als zwei Doppelnebenklassen und die Wirkung ist nicht zweifach transitiv.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Abschließend noch einige Korollare, die sich allerdings auch kurz und direkt beweisen ließen:

**Korollar 1.** *Es gibt keine $n$-fach transitiv wirkenden algebraischen Gruppen für $n \geqq 4$.*

**Korollar 2.** *Falls $G$ dreifach transitiv auf $M$ operiert, so gilt: $M \cong \mathbf{P}^1$ und $G \cong PGl_2$. Insbesondere ist jede dreifach transitive Wirkung schon scharf dreifach transitiv.*

**Korollar 3.** *Falls $G$ scharf zweifach transitiv auf $M$ operiert, so gilt: $M \cong \mathbf{A}^1$ und $G \cong \mathbf{G}_m \rtimes \mathbf{G}_a$.*

## Literaturverzeichnis


[1] A. BIALYNICKI-BIRULA, Some theorems on actions of algebraic groups. Ann. of Math. **98**, 480—497 (1973).

[2] E. CLINE, B. PARSHALL and L. SCOTT, Induced modules and affine quotients. Math. Ann. **230**, 1—14 (1977).

[3] M. DEMAZURE et P. GABRIEL, Groupes Algébriques, Tome I. Paris-Amsterdam 1970.

[4] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, Eléments de Géométrie Algébrique. I: Grundlehren **166**, Heidelberg (1971). III: Publ. Math. IHES **11** (1961), **17** (1963).

[5] J. E. GOODMAN, Affine open subsets of algebraic varieties and ample divisors. Ann. of Math. **89**, 160—183 (1969).

[6] J. E. HUMPHREYS, Linear Algebraic Groups. Graduate Texts Math. **21**, Heidelberg 1981.

[7] T. A. SPRINGER, Linear Algebraic Groupes. Progress Math. **9**, Boston 1981.

[8] J. TITS, Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie. Mém. Acad. Roy. Belg. Sci. **29** (1955).


Eingegangen am 3. 3. 1983

Anschrift des Autors:

Friedrich Knop
Mathematisches Institut der
Universität Erlangen-Nürnberg
Bismarckstraße $1^1/_2$
D-8520 Erlangen

zur Zeit

Mathematisches Institut der
Universität Basel
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel