

# Weylgruppe und Momentabbildung

Friedrich Knop\*  
 Max-Planck-Institut für Mathematik  
 Gottfried-Claren-Straße 26  
 D-5300 Bonn 3

**Abstract:** Let  $G$  be a connected, reductive group defined over an algebraically closed field of characteristic zero. We assign to any  $G$ -variety  $X$  a finite crystallographic reflection group  $W_X$  by means of the moment map on the cotangent bundle. This generalizes the “little Weyl group” of a symmetric space. The Weyl group  $W_X$  is related to the equivariant compactification theory on  $X$ . We determine the closure of the image of the moment map and the generic isotropy group of the action of  $G$  on the cotangent bundle. As a byproduct we determine the ideal of elements of  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  which act trivially on  $X$  as a differential operator.

## 1. Einleitung

Sei  $G$  eine zusammenhängende, reductive algebraische Gruppe, und  $X = G/H$  eine homogene Varietät. Dann wird  $X$  sphärisch genannt ([7]), wenn eine Boreluntergruppe von  $G$  eine dichte Bahn in  $X$  besitzt. Diese Klasse homogener Varietäten ist eine natürliche Verallgemeinerung symmetrischer Räume. Insbesondere die Kompaktifizierungstheorie symmetrischer Räume läßt sich auf sphärische Varietäten übertragen. Die entscheidende Rolle spielt dabei die Menge  $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$  der  $G$ -invarianten,  $\mathbb{Z}$ -wertigen Bewertungen des Körpers der rationalen Funktionen auf  $X$ . Diese Menge hat folgende Struktur ([8], [13]): Es gibt einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ , ein Gitter  $\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$  und einen abgeschlossen, endlich erzeugten, konvexen Kegel  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$  mit  $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}} \cap \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ . Im Fall symmetrischer Räume ist  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  einfach eine Weylkammer für die zugehörige „kleine Weylgruppe“. In [6] hat Brion bewiesen, daß  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  auch im allgemeinen sphärischen Fall der Fundamentalebene einer endlichen Spiegelungsgruppe  $W_X$  ist, und damit  $X$  eine kleine Weylgruppe zugeordnet. Der Beweis ist ziemlich technisch, und  $W_X$  wird sehr indirekt konstruiert. Mein Ziel ist daher:

- a) Konstruiere eine endliche Gruppe  $W_X$  zusammen mit einer reellen Darstellung.

---

\* Teilweise unterstützt durch den Schweizerischen Nationalfonds

b) Zeige dann, daß  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  ein Fundamentalbereich von  $W_X$  ist.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem ersten Punkt, den zweiten werde ich in einer späteren Arbeit behandeln. Die Voraussetzung, daß  $X$  sphärisch oder homogen ist, kann man dabei völlig fallen lassen.

Sei zunächst  $X$  eine beliebige glatte  $G$ -Varietät. Sei weiter  $\pi : T_X^* \rightarrow X$  das Kotangentenbündel auf  $X$ . Die Momentabbildung ist dann ein  $G$ -äquivarianter Morphismus von  $T_X^*$  in den Dualraum  $\mathfrak{g}^*$  der Liealgebra von  $G$ . Dabei wird ein Punkt  $x \in T_X^*$  auf die Linearform  $\xi \in \mathfrak{g} \mapsto x(\xi_{\pi(x)})$  abgebildet. Als  $G$ -Modul ist  $\mathfrak{g}^*$  isomorph zur adjungierten Darstellung  $\mathfrak{g}$ . Sei  $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$  eine Cartanunteralgebra, und  $W := N_G(\mathfrak{t})/Z_G(\mathfrak{t})$  die Weylgruppe von  $G$ . Der kanonischen Isomorphismus  $\mathfrak{g}/G := \text{Spec } k[\mathfrak{g}]^G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t}/W$  von Chevalley liefert dann

$$\tilde{\Psi} : T_X^* \longrightarrow \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t}/W.$$

Die Gruppe  $W_X$  hängt nun eng mit den irreduziblen Komponenten von  $\tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{\Psi}(x))$  für generisches  $x \in T_X^*$  zusammen. Genauer setze  $\bar{T}_X^* := T_X^* \times_{\mathfrak{t}/W} \mathfrak{t}$ . Dieser Raum ist im allgemeinen nicht mehr irreduzibel, aber  $W$  operiert transitiv auf den Komponenten. Sei  $C \subseteq \bar{T}_X^*$  eine von ihnen. Dann setzen wir  $W_X := N_W(C)/Z_W(C)$ , d.h.  $W_X$  ist die Gruppe zur Galoisüberlagerung  $C \rightarrow T_X^*$ . Unser Hauptresultat ist nun, daß  $W_X$  immer eine kristallographische Spiegelungsgruppe ist.

Es erweist sich, daß  $W_X$  nur von der generischen Bahn abhängt, d.h. es gibt eine nicht leere,  $G$ -stabile, offene Teilmenge  $X^0$  von  $X$ , so daß für alle  $x \in X^0$  kanonisch  $W_{Gx} = W_X$  gilt. Insbesondere ändert sich  $W_X$  nicht, wenn man zu einer  $G$ -stabilen offenen Teilmenge übergeht. Dies macht es sinnvoll,  $W_X := W_{X^{\text{reg}}}$  für singuläres  $X$  zu definieren. Für beliebige Bahnen ist  $W_{Gx}$  immer ein Subquotient von  $W_X$ .

Zur Untersuchung von  $T_X^*$  benutzen wir hauptsächlich zwei technische Hilfsmittel. Das eine ist die Algebra  $\mathcal{D}(X)$  der linearen Differentialoperatoren auf  $X$ , was nahe liegt, da sich die Symbole von Elementen aus  $\mathcal{D}(X)$  in natürlicher Weise als Funktionen auf  $T_X^*$  interpretieren lassen.

Das andere sind die horosphärischen Untergruppen. Das sind diejenigen Untergruppen  $S \subseteq G$ , die eine maximale unipotente Untergruppe enthalten. Sie sind auch dadurch charakterisiert, daß  $W_{G/S} = 1$  ist. Jeder  $G$ -Varietät  $X$  läßt sich auf kanonische Weise eine Konjugationklasse  $\mathfrak{S}_X$  horosphärischer Gruppen zuordnen. Diese heißt der Typ von  $X$ . Für horosphärisches  $S \subseteq G$  gilt z.B.  $S \in \mathfrak{S}_{G/S}$ . Erstaunlich viele Eigenschaften von  $X$  hängen nur vom Typ ab. Wir zeigen z.B., daß der Kern von  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}(X)$  nur vom Typ abhängt, wobei  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  die universell einhüllende Algebra von  $\mathfrak{g}$  ist. Dies ergänzt die Resultate von Borho-Brylinski ([3]). Ein Korollar davon ist, daß der Abschluß des Bildes

der Momentabbildung ebenfalls nur vom Typ abhängt. Ein weiteres Beispiel ist, daß eine generische Standgruppe von  $G$  auf  $T_X^*$  existiert und auch nur vom Typ abhängt. Man könnte sagen, daß  $W_X$  die erste geometrische Invariante von  $X$  ist, die über den Typ hinausgeht.

Wie schon oben erwähnt werde ich den Zusammenhang von  $W_X$  mit den äquivarianten Kompaktifizierungen in einer weiteren Arbeit darstellen. Ich erwarte, daß sich die Rolle, die die kleine Weylgruppe für symmetrische Räume spielt, auch auf andere Bereiche verallgemeinern läßt, z.B. die Theorie der invarianten Differentialoperatoren auf  $X$ , oder der  $H$ -endlichen Darstellungen von  $\mathfrak{g}$ .

Kurz vor Fertigstellung dieser Arbeit erreichte mich das Preprint [15] von Panyushev, das eine gewisse Überschneidung mit dieser Arbeit hat (Satz 6.6 im sphärischen Fall, Satz 7.1, Korollar 7.2 und Korollar 8.2). Es enthält keine Beweise.

**Danksagung:** Diese Arbeit entstand während eines Aufenthaltes am Institute for Advanced Study in Princeton bzw. am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn. Ich möchte beiden Instituten für ihre Gastfreundschaft und Unterstützung danken.

**Allgemeine Bezeichnungen:** Alle Varietäten und Gruppen sind über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  der Charakteristik null definiert. Sei  $G$  eine *zusammenhängende*, reductive Gruppe,  $B \subseteq G$  eine Boreluntergruppe,  $T \subseteq B$  ein maximaler Torus und  $U \subseteq B$  die maximale unipotente Untergruppe. Die Liealgebren sind  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{t}$  und  $\mathfrak{u}$ .

## 2. Horosphärische Untergruppen

**Definition:** Eine Untergruppe  $S$  von  $G$  heiße *horosphärisch*, wenn sie eine maximal unipotente Untergruppe von  $G$  enthält. Eine  $G$ -Varietät  $X$  heißt *horosphärisch*, wenn alle Standgruppen horosphärisch sind, d.h. wenn  $X = G \cdot X^U$  gilt.

Sei  $P$  eine parabolische Untergruppe von  $G$ , und  $P'$  ihre Kommutatoruntergruppe. Dann ist jede Untergruppe  $S$  mit  $P' \subseteq S \subseteq P$  horosphärisch. Es gilt aber auch umgekehrt

**Satz 2.1.** *Sei  $S \subseteq G$  horosphärisch. Dann ist  $P := N_G(S)$  parabolisch, und  $S$  enthält  $P'$ . Insbesondere ist  $P/S$  ein Torus.*

*Beweis:* Nach Chevalley gibt es eine Darstellung  $V$  von  $G$  und einen Vektor  $v \in V$ , so daß  $S$  genau der Stabilisator der Gerade  $kv$  ist. Nach Voraussetzung enthält  $S$  eine maximal unipotente Untergruppe  $U$  von  $G$ . Damit ist  $v = v_1 + \dots + v_s$  die Summe linear unabhängiger Höchstgewichtsvektoren  $v_i$  zum Gewicht  $\chi_i$ . Sei  $Q$  die parabolische Untergruppe, die alle Geraden  $kv_i$  stabilisiert. Dann ist  $S$  die Menge aller  $g \in Q$  mit  $\chi_i(g) = \chi_j(g)$  für alle  $i, j = 1, \dots, s$ , und es folgt  $Q' \subseteq S \subseteq Q$ , sowie  $P = N_G(S) = N_G(S') = N_G(Q') = Q$ .  $\square$

**Satz 2.2.** *Jede horosphärische  $G$ -Varietät enthält eine nichtleere,  $G$ -invariante, offene Teilmenge, die zu  $G/S \times V$  isomorph ist. Dabei ist  $S$  eine horosphärische Untergruppe von  $G$  und  $V$  eine Varietät, auf der  $G$  trivial operiert.*

*Beweis:* Nach einem Satz von Rosenlicht [18] können wir  $X$  durch eine nichtleere,  $G$ -invariante, offene Teilmenge ersetzen, so daß ein Quotient  $X \rightarrow V$  existiert. Da es nur abzählbar viele Konjugationsklassen horosphärischer Untergruppen gibt, können wir weiterhin annehmen, daß alle Standgruppen zu einer horosphärischen Untergruppe  $S$  konjugiert sind. Dann ist  $X \rightarrow V$  assoziiert zu einem Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe  $N_G(S)/S$ . Diese ist ein Torus, und damit ist  $X \rightarrow V$  lokal trivial in der Zariskitopologie.  $\square$

Wir wollen nun jeder  $G$ -Varietät  $X$  eine kanonische horosphärische Untergruppe zuordnen. Fundamental ist dafür der lokale Struktursatz von Brion-Luna-Vust, der die Operation gewisser parabolischer Untergruppen in der Nähe vollständiger Bahnen beschreibt. Die folgende Version ist implizit in [7] (Corollaire 1.6) enthalten.

**Satz 2.3.** *Sei  $X$  eine normale  $G$ -Varietät und  $Y \subseteq X$  eine  $G$ -stabile Untervarietät. Dann gibt es eine parabolische Untergruppe  $P \subseteq G$  mit Leviteil  $L$  und eine  $L$ -stabile, affine Untervarietät  $Z \subseteq X$  mit:*

1. *Der kanonische Morphismus  $P \times^L Z \rightarrow X$  ist eine offene Einbettung.*
2.  *$Y \cap Z$  ist nicht leer und ist  $L$ -isomorph zu  $L/L_0 \times V$ , wobei  $L_0$  eine Untergruppe mit  $L' \subseteq L_0 \subseteq L$  und  $V$  eine Varietät mit trivialer  $L$ -Operation ist.*

*$P$  ist eindeutig bestimmt und hängt nur von  $Y$  ab.*

*Beweis:* Zunächst beweisen wir, daß es genügt eine nicht notwendig affine Varietät  $Z$  mit Eigenschaft 1. sowie

- 2'.  *$Y \cap Z \neq \emptyset$  und  $L'$  operiert trivial auf  $Y \cap Z$*

zu finden. Da auf  $Y \cap Z$  nur der Torus  $L/L'$  operiert, können wir durch Übergang zu einer offenen Teilmenge von  $Z$  annehmen, daß  $Y \cap Z = L/L_0 \times V$  ist, sowie daß  $Z$  eine lokal abgeschlossene Untervarietät eines projektiven Raumes ist. Dann gibt es ein homogenes  $L$ -semiinvariantes Polynom  $f$  mit  $f|_{\overline{Z}-Z} = 0$  aber  $f|_{Y \cap Z} \neq 0$ . Ersetze nun  $Z$  durch  $Z \cap \{f \neq 0\}$ .

In [7] wurde der Satz für den Fall bewiesen, daß  $Y$  eine vollständige Bahn ist. Wir führen den Satz durch Induktion nach  $\dim G$  darauf zurück. Nach Sumihiro [21] können wir annehmen, daß  $X$  abgeschlossene Teilmenge eines projektiven Raumes ist. Sei  $y_0 \in Y$  ein Punkt mit vollständiger Bahn und wende den Satz auf  $Gy_0 \subseteq X$  an. Wir erhalten  $P_0$ ,  $L_0$  und  $Z_0$  mit den obigen Eigenschaften. Wenn  $G_{y_0} \neq G$  ist, können wir die Induktionvoraussetzung anwenden und die Behauptung folgt leicht. Wenn aber in  $Y$  alle

vollständigen Bahnen Fixpunkte sind, operiert  $G'$  trivial auf  $Y$  ([2]), und wir sind ebenfalls fertig. Sei  $B \subseteq P$  eine Boreluntergruppe. Dann ist für  $y$  in einer offenen Teilmenge von  $Y$  die Standgruppe  $B_y$  konjugiert zu  $B \cap L_0$ . Dadurch ist  $P$  eindeutig bestimmt.  $\square$

Eine erste Anwendung ist die Bestimmung der generischen Standgruppe von  $B$ .

**Korollar 2.4.** *Sei  $X$  eine  $G$ -Varietät. Dann gibt es eine nichtleere  $B$ -stabile offene Teilmenge  $V \subseteq X$  mit der Eigenschaft, daß alle Standgruppen  $B_x$  für  $x \in V$  zu einer Untergruppe  $B_0 \subseteq B$  konjugiert sind (Konjugation in  $B$ ).*

*Weiterhin gibt es eine parabolische Untergruppe  $P \supseteq B$  und einen Leviteil  $L$  mit  $(L, L) \cap B \subseteq B_0 \subseteq L \cap B$ .*

*Beweis:* Wende den Satz auf  $Y = X$  an.  $\square$

Seien  $P$ ,  $L$  und  $B_0$  wie im Korollar, und  $P^-$  die parabolische Untergruppe mit  $P \cap P^- = L$ . Dann gibt es genau eine horosphärische Untergruppe  $S$  mit  $S \cap B = B_0$  und  $N_G(S) = P^-$ .

**Definition:** Die Konjugationsklasse  $\mathfrak{S}_X$  von  $S$  heißt der (*horosphärische*) *Typ* der  $G$ -Varietät  $X$ . Der *Rang* von  $X$  ist  $\text{rg } X := \dim P/S$ .

Sei  $S \subseteq G$  eine horosphärische Untergruppe. Dann sieht man leicht, daß  $\mathfrak{S}_{G/S}$  die Konjugationsklasse von  $S$  ist. Damit erhalten wir folgende Charakterisierung des horosphärischen Typs: Seien  $x \in X$  und  $y \in G/S$  Punkte allgemeiner Lage. Dann ist  $B_x$  konjugiert zu  $B_y$  (durch ein Element aus  $B$ ).

**Bemerkung:** Sei  $\overline{G}$  eine reelle reductive Liegruppe ohne kompakten Faktor, und  $K$  eine maximal kompakte Untergruppe, sowie  $\overline{X} = \overline{G}/K$  der zugehörige symmetrische Raum. Weiter sei  $P = MAN$  eine minimal parabolische Untergruppe. Die Bahnen von  $N$  in  $\overline{X}$  heißen Horosphären,  $\overline{S} = MN$  ist der Stabilisator einer Horosphäre und  $\overline{G}/\overline{S}$  ist der Raum aller Horosphären. Nun ist leicht zu sehen, daß der Typ der Komplexifizierung  $\overline{X}_{\mathbb{C}}$  genau  $\overline{S}_{\mathbb{C}}$  ist. Daher die Bezeichnung „horosphärisch“. Siehe in diesem Zusammenhang auch [10].

Der folgende Satz zeigt, daß der Typ eine Deformationsinvariante ist.

**Satz 2.5.** *Sei  $X$  eine normale  $G$ -Varietät, und  $Y \subseteq X$  ein irreduzibler Divisor, der (schematisch) durch eine invariante Funktion  $f \in k[X]^G$  definiert wird. Dann haben  $X$  und  $Y$  den gleichen Typ.*

*Beweis:* Wende Satz 2.3 auf  $Y \subseteq X$  an. Dann wird  $Y_0 := Y \cap Z$  ebenfalls durch eine  $L$ -invariante Funktion definiert, und es gilt  $Y_0 \subseteq Z^{L_0}$ . Sei  $Z//L_0 := \text{Spec } k[Z]^{L_0}$ , und  $\pi : Z \rightarrow Z//L_0$  der Quotientenmorphismus. Da  $Y_0 \rightarrow Z//L_0$  injektiv ist, gilt  $\dim Z - 1 \leq \dim Z//L_0$ . Gleichheit ist nicht möglich, da sonst  $Y$  nicht durch eine Invariante definiert wäre. Also

ist  $\pi$  ein endlicher Morphismus. Aus dem gleichen Grunde ist  $\pi$  in  $Y$  unverzweigt, woraus folgt, daß  $\pi$  ein Isomorphismus ist.  $\square$

Nach [16] läßt sich jede affine  $G$ -Varietät in eine horosphärische Varietät deformieren. Genauer gilt:

**Satz 2.6.** *Sei  $X$  eine affine  $G$ -Varietät. Dann gibt es eine affine  $G$ -Varietät  $Z$  und eine  $G$ -invariante Funktion  $\Delta : Z \rightarrow \mathbf{A}^1$  mit folgenden Eigenschaften:*

1.  $X_t := \Delta^{-1}(t)$  ist für  $t \neq 0$   $G$ -isomorph zu  $X$ .
2.  $X_0$  ist horosphärisch.
3. Die Algebren  $k[X_0]^U$  und  $k[X_t]^U$  sind  $B$ -isomorph. Insbesondere sind  $k[X_0]$  und  $k[X_t]$  isomorph als  $G$ -Moduln.
4.  $k[Z]$  besitzt eine  $G$ -invariante Graduierung und  $\Delta$  ist homogen mit dem Grad 1.

**Bemerkung:** Der  $G$ -Modul-Isomorphismus  $k[X_1] \xrightarrow{\sim} k[X_0]$  aus Punkt 3 ist kanonisch. Er stellt ein algebraisches Analogon zur Radontransformation dar (vgl. [10]).

Wir brauchen später eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf beliebige  $G$ -Varietäten.

**Satz 2.7.** *Sei  $X$  eine  $G$ -Varietät. Dann gibt es eine  $G$ -Varietät  $Z$  und eine surjektive,  $G$ -invariante Funktion  $\Delta : Z \rightarrow \mathbf{A}^1$  mit folgenden Eigenschaften:*

1.  $X_t := \Delta^{-1}(t)$  ist für  $t \neq 0$   $G$ -isomorph zu einer offenen Teilmenge von  $X$ .
2. Sei  $S \in \mathfrak{S}_X$ . Dann ist  $X_0$  isomorph zu  $V \times G/S$ .
3.  $Z$  und  $\Delta$  sind glatt.
4. Auf  $Z$  gibt es eine  $\mathbf{G}_m$ -Operation, die mit der  $G$ -Wirkung vertauscht, so daß  $\Delta$  äquivariant ist.

*Beweis:* Die Aussage des Satzes betrifft nur eine offene  $G$ -invariante Teilmenge von  $X$ . Daher können wir annehmen, daß  $X$  eine  $G$ -invariante abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbf{P}(V)$  für eine Darstellung  $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  ist. Sei  $\tilde{X} \subseteq V$  der affine Kegel von  $X$ . Wir wenden nun Satz 2.6 auf  $\tilde{X}$  an und erhalten eine affine Varietät  $\tilde{Z}$ . Weiterhin überträgt sich die Graduierung von  $k[\tilde{X}]$  auf  $\tilde{Z}$ . Eine geeignete offene Teilmenge von  $\mathrm{Proj} \tilde{Z}$  hat dann alle geforderten Eigenschaften.  $\square$

### 3. Die Momentabbildung

In diesem Abschnitt sei  $X$  eine glatte  $G$ -Varietät. Dann sei  $T_X^* := \text{Spec } S^* \Omega_X^\vee$  das Kotangentenbündel über  $X$  mit der kanonischen Projektion  $\pi : T_X^* \rightarrow X$ . Jedes Element  $\xi \in \mathfrak{g}$  induziert ein Vektorfeld  $\xi_*$  auf  $X$ . Damit läßt sich eine  $G$ -äquivalente Abbildung

$$\tilde{\Phi} : T_X^* \longrightarrow \mathfrak{g}^* : \alpha \mapsto [\xi \mapsto \alpha(\xi_{\pi(\alpha)})]$$

definieren. Bezüglich der kanonischen symplektischen Struktur auf  $T_X^*$  ist dies eine sogenannte *Momentabbildung*, d.h. erfüllt folgende Gleichung (s. [12]):

$$(\xi, d\tilde{\Phi}_\alpha(\eta)) = \langle \xi_\alpha | \eta \rangle_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \in T_X^*, \xi \in \mathfrak{g} \text{ und } \eta \in T_\alpha T_X^*. \quad (*)$$

Dabei ist  $(\cdot, \cdot)$  die kanonische Paarung zwischen  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g}^*$ , und  $\langle \cdot | \cdot \rangle_\alpha$  die symplektische Form auf dem Tangentialraum  $T_\alpha T_X^*$ . Wir werden später (Abschnitt 6) eine verfeinerte Momentabbildung  $\Phi$  mit besseren Eigenschaften einführen. Daher bezeichnen wir die richtige Momentabbildung mit  $\tilde{\Phi}$ .

Die Momentabbildung auf dem Kotangentenraum läßt sich auch anders interpretieren. Sei  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  oder kurz  $\mathfrak{U}$  die universell einhüllende Algebra von  $\mathfrak{g}$  und  $\mathcal{D}(X)$  die Algebra der linearen Differentialoperatoren auf  $X$ . Es gibt einen natürlichen Homomorphismus  $\psi_X : \mathfrak{U} \rightarrow \mathcal{D}(X)$ . Beide Algebren sind mit einer kanonischen Filtrierung  $\mathfrak{U}_n$  bzw.  $\mathcal{D}_n(X)$  ausgestattet, so daß  $\psi_X(\mathfrak{U}_n) \subseteq \mathcal{D}_n(X)$  gilt. Für die assoziierten graduierten Algebren gilt  $\text{gr } \mathfrak{U} = S(\mathfrak{g}) = k[\mathfrak{g}^*]$  (Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt), sowie  $\text{gr } \mathcal{D}(X) \hookrightarrow k[T_X^*]$  (Symbolabbildung). Also liefert  $\psi_X$  einen Homomorphismus

$$\text{gr } \psi_X : k[\mathfrak{g}^*] \longrightarrow k[T_X^*],$$

der genau die Momentabbildung  $\tilde{\Phi}$  induziert (s. [3] §1).

Wenn  $X = G/H$  homogen ist, hat die Momentabbildung eine sehr einfache Gestalt. Sei  $\mathfrak{h}^\perp$  der Annulator der Liealgebra von  $H$  in  $\mathfrak{g}^*$ . Dann ist  $T_X^*$  gleich dem Faserprodukt  $G \times^H \mathfrak{h}^\perp$  und  $\tilde{\Phi}$  ist die kanonische Abbildung  $G \times^H \mathfrak{h}^\perp \rightarrow \mathfrak{g}^* : [g, \alpha] \mapsto g\alpha$ .

#### 4. Differentialoperatoren auf horosphärischen Varietäten

Sei  $S \subseteq G$  eine horosphärische Untergruppe mit Liealgebra  $\mathfrak{s}$ ,  $X := G/S$ ,  $P := N_G(S)$ , sowie  $A := P/S$ . Dann ist  $P$  eine parabolische Untergruppe und  $A$  ein Torus, der von rechts auf  $X$  operiert. Das Bild von  $\psi_X$  liegt in  $\mathcal{D}(X)^A$ . Weiter setzen wir  $Y := G/P$ ,  $Z := T_X^*/A = G \times^P \mathfrak{s}^\perp$  und  $\pi : X \rightarrow Y$ ,  $\bar{\pi} : T_X^* \rightarrow Z$  die kanonischen Projektionen. Die Ergebnisse in diesem Abschnitt sind für  $S = P'$  unabhängig auch von Soergel [20] bewiesen worden.

**Lemma 4.1.** *Der kanonische Morphismus  $\pi' : Z = G \times^P \mathfrak{s}^\perp \rightarrow \mathfrak{g}^*$  ist eigentlich. Seine generischen Fasern sind endlich. Weiter gilt  $H^i(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$  für  $i > 0$ .*

*Beweis:* Der Morphismus  $\pi'$  ist eigentlich, weil er gleich der Komposition der abgeschlossenen Einbettung  $G \times^P \mathfrak{s}^\perp \hookrightarrow G/P \times \mathfrak{g}^*$  und der Projektion  $G/P \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  ist. Wir identifizieren nun  $\mathfrak{g}^*$  und  $\mathfrak{g}$  mit Hilfe einer nichtausgearteten invarianten quadratischen Form. Das unipotente Radikal  $\mathfrak{p}_u$  von  $\mathfrak{p}$  liegt dann in  $\mathfrak{s}^\perp$ . Sei  $N \subseteq \mathfrak{g}^*$  die Menge der nilpotenten Elemente. Dann ist  $\pi'^{-1}(N) = G \times^P \mathfrak{p}_u = T_{G/P}^*$  (mengentheoretisch) und die Einschränkung von  $\pi'$  ist die Momentabbildung, die nach [17] generisch endliche Fasern hat. Daraus folgt dies auch für  $\pi'$ .

Der Morphismus  $\bar{\pi} : T_X^* \rightarrow Z$  ist ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe  $A$ . Daraus folgt für die kanonische Garbe

$$\omega_Z = \wedge^a \mathfrak{a} \otimes_k (\pi_* \omega_{T_X^*})^A,$$

mit  $a = \dim A$ . Da  $T_X^*$  eine symplektische Struktur besitzt, ist  $\omega_{T_X^*}$  und damit auch  $\omega_Z$  trivial. Es gilt also  $H^i(Z, \mathcal{O}_Z) = H^i(Z, \omega_Z)$ . Diese Kohomologiegruppen sind Null für  $i > 0$  nach dem Verschwindungssatz von Grauert-Riemenschneider.  $\square$

**Lemma 4.2.**  *$\mathcal{D}(X)^A$  ist ein endlich erzeugter  $\mathfrak{U}$ -Linksmodul.*

*Beweis:* Es genügt zu zeigen, daß die assoziierte graduierte Algebra  $\text{gr } \mathcal{D}(X)^A$  ein endlich erzeugter Modul über  $\text{gr } \mathfrak{U}$  ist. Es gilt  $\text{gr } \mathcal{D}(X)^A \subseteq k[T_{G/S}^*]^A = k[G \times^P \mathfrak{s}^\perp]$ . Die kanonische Abbildung  $G \times^P \mathfrak{s}^\perp \rightarrow \mathfrak{g}^*$  eigentlich nach Lemma 4.1. Also ist  $k[G \times^P \mathfrak{s}^\perp]$  und damit auch  $\text{gr } \mathcal{D}(X)^A$  ein endlich erzeugter  $k[\mathfrak{g}^*]$ -Modul.  $\square$

**Lemma 4.3.**  $\text{gr } \mathcal{D}(X)^A = k[T_X^*]^A = k[Z]$

*Beweis:* Die zweite Gleichheit ist wegen  $Z = T_X^*/A$  klar. Der Beweis der ersten Gleichheit ist analog zum Fall  $S = P$  in [3] Lemma 1.4 (siehe auch [4] Anhang 2). Es genügt zu zeigen, daß die Gruppen  $H^i(T_X^*, \mathcal{O}_{T_X^*})^A$  für  $i > 0$  verschwinden. Nun gilt

$$H^i(T_X^*, \mathcal{O}_{T_X^*})^A = H^i(Z, \bar{\pi}_* \mathcal{O}_{T_X^*})^A = H^i(Z, (\bar{\pi}_* \mathcal{O}_{T_X^*})^A) = H^i(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$$

nach Lemma 4.1. □

Sei  $\mathcal{D}_X$  die Garbe der linearen Differentialoperatoren auf  $X$ , und  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} := (\pi_* \mathcal{D}_X)^A$ . Für ein  $\lambda \in \mathfrak{a}^* \subseteq \mathfrak{t}^*$  sei  $\mathfrak{m}_\lambda$  das von den Elementen  $a - \lambda(a) \in \mathfrak{U}(\mathfrak{a})$  erzeugte Ideal. Weiter sei  $\mathcal{D}_\lambda := \mathcal{D}_{\mathfrak{a}}/\mathfrak{m}_\lambda \mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$ . Dies ist eine getwistete Garbe von Differentialoperatoren auf  $Y$  (s. [1]). Der Charakter  $\lambda$  heißt *dominant*, wenn für jede positive Wurzel  $\alpha$  gilt:  $\langle \lambda + \rho | \alpha^\vee \rangle \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ . Dabei ist  $\rho$  die halbe Summe der positiven Wurzeln.

**Lemma 4.4.** *Sei  $\lambda \in \mathfrak{a}^*$  dominant. Dann ist  $\mathfrak{U} \rightarrow H^0(Y, \mathcal{D}_\lambda)$  surjektiv.*

*Beweis:* Sei  $\varphi : G/B \rightarrow G/P$ . Die zu  $\lambda$  gehörige getwistete Garbe von Differentialoperatoren auf  $G/B$  werde mit  $\overline{\mathcal{D}}_\lambda$  bezeichnet. Dann ist  $\varphi^* \mathcal{D}_\lambda$  ein  $\overline{\mathcal{D}}_\lambda$ -Modul und es gilt  $H^0(Y, \mathcal{D}_\lambda) = H^0(G/B, \varphi^* \mathcal{D}_\lambda)$ . Nach [1] ist die Surjektivität von  $\mathfrak{U} \rightarrow H^0(G/B, \varphi^* \mathcal{D}_\lambda)$  äquivalent zur Surjektivität der Lokalisierung

$$\overline{\mathcal{D}}_\lambda = \overline{\mathcal{D}}_\lambda \otimes_{\mathfrak{U}} \mathfrak{U} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}_\lambda \otimes_{\mathfrak{U}} H^0(G/B, \varphi^* \mathcal{D}_\lambda) = \varphi^* \mathcal{D}_\lambda.$$

Es ist aber klar, daß dieser Homomorphismus surjektiv ist. □

**Bemerkung:** In diesem Lemma braucht der Grundkörper  $k$  nicht unbedingt algebraisch abgeschlossen zu sein.

**Satz 4.5.** *Sei  $\mathcal{N}$  das Bild von  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_k \mathfrak{U}(\mathfrak{a})$  in  $\mathcal{D}(X)^A$ . Dann gibt es ein  $f \in \mathfrak{U}(\mathfrak{a})$  mit  $f\mathcal{D}(X)^A \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{D}(X)^A$ .*

*Beweis:* Sei  $R := \mathfrak{U}(\mathfrak{a})$  und  $K$  der Quotientenkörper von  $R$ . Da  $\mathcal{D}(X)^A$  ein endlich erzeugter  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ -Modul ist, ist die Behauptung äquivalent zur Surjektivität von  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g} \otimes_k K) \rightarrow \mathcal{D}(X)^A \otimes_R K$ . Sei  $\mathfrak{m}$  der Kern von  $R \otimes_k K \rightarrow K$ . Wähle eine Basis  $a_i$  mit Koordinatenfunktionen  $x_i$  auf  $\mathfrak{a}$ . Dann ist  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $\mathfrak{U}(\mathfrak{a} \times_k K)$ , das zu  $\lambda = \sum_i x_i \otimes a_i \in \mathfrak{a}^* \otimes_k K$  gehört. Wir erhalten  $\mathcal{D}(X)^A \otimes_R K \subseteq H^0(X_K, \mathcal{D}_\lambda)$  und können Lemma 4.4 mit dem Grundkörper  $K$  anstatt  $k$  anwenden. □

**Korollar 4.6.** *Die Normalisierung von  $\text{gr } \mathcal{N}$  ist  $k[T_X^*]^A$ . Insbesondere ist die generische Faser von  $T_X^* \rightarrow \text{Spec } \text{gr } \mathcal{N}$  irreduzibel.*

*Beweis:* Sei  $\overline{f} \in \text{gr } \mathcal{D}(X)^A$  das Symbol von  $f$ . Es folgt dann  $\overline{f}k[T_X^*]^A = \overline{f} \text{gr } \mathcal{D}(X)^A \subseteq \text{gr } \mathcal{N}$ . □

**Bemerkung:** Nach [20] ist  $\mathcal{N} \neq \mathcal{D}$  für  $G = \text{Sp}_{2n}$ ,  $G/P = \mathbf{P}^{2n-1}$  und  $S = P'$ .

## 5. Differentialoperatoren auf beliebigen glatten $G$ -Varietäten

Sei  $X$  eine beliebige glatte  $G$ -Varietät. Wir bezeichnen den Kern von  $\psi_X$  mit  $I_X(\mathfrak{g})$  bzw. mit  $I_X$ , wenn es keine Unklarheit über  $\mathfrak{g}$  gibt.

**Satz 5.1.** *Sei  $S \in \mathfrak{S}_X$ . Dann ist  $I_X = I_{G/S}$ .*

*Beweis:* Zunächst eine Bemerkung: Weder  $I_X$  noch  $S$  ändern sich, wenn man  $X$  durch eine offene,  $G$ -invariante Teilmenge ersetzt. Wir werden mehrfach davon Gebrauch machen.

Zuerst beweisen wir den Satz für den Fall, daß  $X$  quasiaffin ist. Sei  $X_1$  eine normale, affine Einbettung von  $X$ , und  $\Delta : Z \rightarrow \mathbf{A}^1$  wie in Satz 2.6 (das dortige  $X$  ist  $X_1$ ). Das Ideal  $I_{X_1^{\text{reg}}}$  hängt offenbar nur von der  $G$ -Modulstruktur von  $k[X_1^{\text{reg}}]$  ab. Damit gilt

$$I_X = I_{X_1^{\text{reg}}} = I_{X_0^{\text{reg}}} = I_{V \times G/S} = I_{G/S}.$$

Wir führen nun den allgemeinen auf den quasiaffinen Fall zurück. Nach Ersetzen von  $X$  durch eine geeignete offene  $G$ -stabile Teilmenge gibt es nach Satz 2.7 eine Deformation  $\Delta : Z \rightarrow \mathbf{A}^1$  mit

$$X_a \cong \begin{cases} X & \text{für } a \neq 0; \\ V \times G/S & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

Daraus folgt sofort  $I_X \subseteq I_{G/S}$ .

Zu zeigen ist noch die umgekehrte Inklusion. Nach [21] gibt es eine offene Teilmenge  $X_0 \subseteq X$ , die sich  $G$ -äquivariant in einen projektiven Raum  $\mathbf{P}^{N-1}$  einbetten läßt. Wir nehmen wieder  $X_0 = X$  an. Außerdem können wir noch annehmen, daß  $G \rightarrow \text{PGL}_N$  injektiv ist. Sei  $\tilde{X}$  bzw.  $\tilde{G}$  das Urbild von  $X$  in  $\mathbf{A}^N \setminus \{0\}$  bzw. von  $G$  in  $\text{GL}_N$ . Dann gibt es einen surjektiven Homomorphismus  $\varphi : \mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ , und es gilt

$$I_X(\tilde{\mathfrak{g}}) = \varphi^{-1}(I_X(\mathfrak{g})).$$

Daher können wir  $G$  durch  $\tilde{G}$  ersetzen, d.h. wir können annehmen, daß  $G$  die Gruppe  $C$  der skalaren Multiplikationen enthält. Sei  $\tilde{S} \in \mathfrak{S}_{\tilde{X}}$ . Dann ist  $S = \tilde{S} \cdot C$ . Wir haben

$$I_{G/\tilde{S}} = I_{\tilde{X}} \subseteq I_X$$

schon gezeigt. Daher gilt

$$I_0 := I_{G/\tilde{S}} + \mathfrak{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{c} \subseteq I_X \subseteq I_{G/S}.$$

Der Satz folgt nun aus dem nächsten Lemma, da  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I_X$  als Unter algebra von  $\mathcal{D}(X)$  nullteilerfrei ist.  $\square$

**Lemma 5.2.** Für jedes  $u \in I_{G/S}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $u^n \in I_0$ .

*Beweis:* Sei  $P := N_G(\tilde{S})$  und  $A := P/\tilde{S}$ . Dann ist  $P$  parabolisch und  $A$  ist ein Torus, der von rechts auf  $G/\tilde{S}$  operiert. Das Bild von  $\psi_{G/S}$  bzw.  $\psi_{G/\tilde{S}}$  ist eine Teilmenge von  $\mathcal{D}(G/S)^A$  bzw.  $\mathcal{D}(G/\tilde{S})^A$ . Sei  $\mathcal{D} := \mathcal{D}(G/\tilde{S})^A$ . Sei  $\zeta$  ein Erzeuger von  $\psi_{G/\tilde{S}}(\mathfrak{c})$ . Er liegt im Zentrum von  $\mathcal{D}$ .

**Hilfslemma.** Es gibt einen kanonischen Homomorphismus  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}(G/S)$ . Sein Kern ist das Hauptideal  $\mathcal{D}\zeta$ .

*Beweis:* Sei  $D \in \mathcal{D}$  und  $f \in k(G/S)$ . Dann induziert  $f$  eine  $C$ -invariante Funktion  $\tilde{f}$  auf  $G/\tilde{S}$ . Wir können  $C$  als Untergruppe von  $A$  auf—fassen. Dann ist  $D\tilde{f}$  wiederum  $C$ -invariant und wird daher von einer Funktion auf  $G/S$  induziert. Dies liefert den Homomorphismus. Sei nun  $D$  im Kern. Weiter sei  $V \subseteq G/S$  eine offene affine Teilmenge, über der die Faserung  $G/\tilde{S} \rightarrow G/S$  trivial ist, d.h. aussieht wie  $V \times C \rightarrow V$ . Dann ist leicht zu sehen, daß  $D|_{V \times C} = D_0^V \zeta$  mit  $D_0^V \in \mathcal{D}(V \times C)^C$  ist. Da außerdem  $D_0^V$  eindeutig ist, kleben die  $D_0^V$  zu einem globalen Operator  $D_0$  zusammen und es folgt die Behauptung.  $\square$

Wir können nun das Lemma beweisen. Sei  $\psi = \psi_{G/\tilde{S}}$  und  $u \in I_{G/S}$ . Nach dem Hilfslemma gibt es  $D \in \mathcal{D}$  mit  $\psi(u) = D\zeta$ . Da  $\mathfrak{U}$  noethersch ist und  $\mathcal{D}$  endlich erzeugt (Lemma 4.2), bricht die Folge der Untermoduln  $\sum_{i=0}^j \mathfrak{U}D^i$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  ab, d.h. es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $u_0, \dots, u_n \in \mathfrak{U}$  mit

$$D^n = \sum_{i=0}^{n-1} \psi(u_i)D^i.$$

Also gilt

$$\psi(u^n) = D^n \zeta^n = \sum_{i=0}^{n-1} \psi(u_i) \psi(u)^i \zeta^{n-i} \in \psi(\mathfrak{U}\mathfrak{c}).$$

Damit sind das Lemma und der Satz bewiesen.  $\square$

Setze  $\mathcal{M}_X := \mathfrak{U}/I_X = \psi_X(\mathfrak{U}) \subseteq \mathcal{D}(X)$ . Auf  $\mathcal{M}_X$  gibt es zwei kanonische Filtrierungen: Die  $G$ -Filtrierung ist von  $\mathfrak{U}$ , die  $X$ -Filtrierung von  $\mathcal{D}(X)$  induziert. Mit Hilfe von Satz 5.1 erhält  $\mathcal{M}_X$  noch eine dritte Filtrierung, nämlich die  $G/S$ -Filtrierung von  $\mathcal{M}_{G/S} = \mathcal{M}_X$ . Eine Filtrierung eines  $\mathfrak{U}$ -Moduls  $\mathcal{M}$  heißt *gut*, wenn  $\text{gr } \mathcal{M}$  als  $\text{gr } \mathfrak{U}$ -Modul endlich erzeugt ist. Die  $G$ -Filtrierung ist trivialerweise gut. Es gilt aber auch

**Korollar 5.3.** Die  $X$ -Filtrierung von  $\mathcal{M}_X$  ist gut und stimmt mit der  $G/S$ -Filtrierung überein.

*Beweis:* Die  $G/S$ -Filtrierung ist gut nach [3] Lemma 4.5 (oder dem Beweis von Lemma 4.2). Die Konstruktion von Satz 2.7 zeigt, daß die  $X$ -Filtrierung in der  $G/S$ -Filtrierung liegt.

Andererseits enthält die  $X$ -Filtrierung die  $G$ -Filtrierung, d.h. ist eingeklemmt zwischen zwei guten Filtrierungen. Damit ist sie selbst gut. Der Kern des kanonischen Homomorphismus  $\text{gr}_X \mathcal{M}_X \rightarrow \text{gr}_{G/S} \mathcal{M}_X$  besteht aus nilpotenten Elementen, und da  $\text{gr}_X \mathcal{M}_X$  nulleteilerfrei ist, ist er injektiv. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung:** Man kann das Korollar auch so formulieren: Sei  $u \in \mathfrak{U}$ . Dann hängt die Ordnung des Differentialoperators  $\psi_X(u)$  nur vom Typ von  $X$  ab.

Nun sind wir in der Lage, den Abschluß des Bildes der Momentabbildung zu bestimmen:

**Satz 5.4.** *Sei  $G$  eine zusammenhängende, reductive Gruppe und  $X$  eine glatte  $G$ -Varietät. Sei  $S \in \mathfrak{S}_X$  mit Liealgebra  $\mathfrak{s}$ . Dann sind die Abschlüsse der Bilder der Momentabbildungen von  $T_X^*$  und  $T_{G/S}^*$  gleich, d.h.*

$$\overline{\tilde{\Phi}(T_X^*)} = G \cdot \mathfrak{s}^\perp \subseteq \mathfrak{g}^*$$

*Beweis:* Folgt mit [3] Satz 4.3 direkt aus dem Korollar.  $\square$

## 6. Die Faktorisierung der Momentabbildung

Sei nun  $\tilde{M}_X := \overline{\tilde{\Phi}(T_X^*)} = G \cdot \mathfrak{s}^\perp$ . Im allgemeinen sind die generischen Fasern von  $\tilde{\Phi} : T_X^* \rightarrow \tilde{M}_X$  nicht irreduzibel, wie man z.B. bei  $X = G/U$  sieht. Algebraisch bedeutet dies, daß  $k[\tilde{M}_X]$  in  $k[T_X^*]$  nicht ganz abgeschlossen ist. Sei daher  $M_X$  das Spektrum des ganzen Abschlusses von  $k[\tilde{M}_X]$  in  $k[T_X^*]$ . Den zugehörigen Morphismus  $T_X^* \rightarrow M_X$  bezeichnen wir mit  $\Phi$ . Weiter sei  $\tilde{L}_X := \text{Im } \tilde{M}_X \subseteq \mathfrak{g}^* // G := \text{Spec } k[\mathfrak{g}^*]^G$  das Bild im Quotienten, sowie  $L_X := \text{Spec } k[M_X]^G$ . Den Morphismus  $T_X^* \rightarrow L_X$  bezeichnen wir mit  $\Psi$ . Dann hat auch  $\Psi$  generisch irreduzible Fasern, und  $L_X \rightarrow \tilde{L}_X$  ist surjektiv und endlich. Schließlich sei  $\Pi : M_X \rightarrow L_X$  der Quotientenmorphismus. Wir haben also folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} T_X^* & \xrightarrow{\Phi} & M_X & \rightarrow & \tilde{M}_X & \hookrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ & \Psi \searrow & \Pi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & L_X & \rightarrow & \tilde{L}_X & \hookrightarrow & \mathfrak{g}^* // G \end{array}$$

**Lemma 6.1.** *Sei  $P \subseteq G$  eine parabolische Untergruppe mit Leviteil  $L$ . Seien  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{p}_u^\perp$  mit  $\alpha_1|_{\mathfrak{l}} = \alpha_2|_{\mathfrak{l}}$ . Dann haben  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  dasselbe Bild in  $\mathfrak{g}^* // G$ .*

*Beweis:* Wir identifizieren  $\mathfrak{g}^*$  und  $\mathfrak{g}$  mittels einer invarianten nichtausgearteten quadratischen Form. Dann ist  $\mathfrak{p}_u^\perp = \mathfrak{p}$ , und  $\alpha_i$  zerlegt sich in  $\alpha_s + \alpha_{i,u}$  mit  $\alpha_s \in \mathfrak{l}, \alpha_{i,u} \in \mathfrak{p}_u$ . Wähle eine Einparameteruntergruppe  $\lambda : k^* \rightarrow Z(L)$ , die auf  $\mathfrak{p}_u$  kontrahierend operiert. Aus  $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha_1 = \alpha_s = \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_2$  folgt die Behauptung.  $\square$

Sei jetzt  $S \in \mathfrak{S}_X$ ,  $P = N_G(S)$ ,  $A = P/S$ ,  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}/\mathfrak{s}$ . Nach Lemma 6.1 faktorisiert der Morphismus  $\mathfrak{s}^\perp \rightarrow \mathfrak{g}^*//G$  durch  $\mathfrak{a}^*$ . Wir haben also

$$\begin{array}{ccc} T_X^* & \xrightarrow{\sigma} & \mathfrak{a}^* \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \\ L_X & \longrightarrow & \mathfrak{g}^*//G \end{array}$$

wobei  $\mathfrak{a}^*$  und  $L_X$  dasselbe Bild in  $\mathfrak{g}^*//G$  haben (Satz 5.4).

**Lemma 6.2.** *Es gibt einen Morphismus  $\sigma : \mathfrak{a}^* \rightarrow T_X^*$ , so daß das obige Diagramm kommutiert.*

*Beweis:* Wähle eine  $P$  gegenüberliegende Untergruppe  $P^-$  und einen Punkt  $x \in X$  mit  $P_x^- = P^- \cap S$ . Wir zerlegen dann  $\mathfrak{g}$  (mit  $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{p}^- \cap \mathfrak{s}$ ,  $\mathfrak{l} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{l}_0$ ):

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_u^- \oplus \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{p}_u$$

Wähle noch ein Komplement  $R$  von  $\mathfrak{p}^- x$  in  $T_x X$ :

$$T_x X = \mathfrak{p}^- x \oplus R \cong \mathfrak{p}_u^- \oplus \mathfrak{a}_0 \oplus R$$

Sei nun  $\alpha : \mathfrak{p}/\mathfrak{s} \rightarrow k$  gegeben. Wir definieren dann  $\sigma(\alpha) \in T_x(X)^* \subseteq T_X^*$  durch

$$\sigma(\alpha)|_R = \sigma(\alpha)|_{\mathfrak{p}_u^-} = 0, \quad \sigma(\alpha)|_{\mathfrak{a}_0} = \alpha|_{\mathfrak{a}_0}$$

Wir müssen zeigen, daß

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}^* & \xrightarrow{\sigma} & T_X^* \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{\Phi} \\ \mathfrak{g}^*//G & \longleftarrow & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

kommutiert. Dazu definieren wir  $\alpha_0 \in \mathfrak{g}^*$  durch

$$\alpha_0|_{\mathfrak{p}_u^-} = \alpha_0|_{\mathfrak{l}_0} = \alpha_0|_{\mathfrak{p}_u} = 0, \quad \alpha_0|_{\mathfrak{a}_0} = \alpha|_{\mathfrak{a}_0}$$

Nach Lemma 6.1 haben  $\alpha$  und  $\alpha_0$  dasselbe Bild in  $\mathfrak{g}^*//G$ . Das gleiche Lemma angewendet auf  $P^-$ ,  $\alpha_0$  und  $\tilde{\Phi}(\sigma(\alpha))$  liefert die Behauptung.  $\square$

**Lemma 6.3.**  *$\Psi \circ \sigma : \mathfrak{a}^* \rightarrow L_X$  ist surjektiv und eigentlich, und hängt nicht von der Wahl von  $P^-$ ,  $x$  und  $R$  ab.*

*Beweis:* Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}^* & \xrightarrow{\Psi \circ \sigma} & L_Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \tilde{L}_X \end{array}$$

kommutiert. Daraus folgt die erste Behauptung. Die Menge aller Auswahlen  $(P^-, x, R)$  bildet eine irreduzible Varietät. Da es aber nur endlich viele Morphismen  $\mathfrak{a}^* \rightarrow L_X$  gibt, so daß obiges Diagramm kommutiert, gilt auch die zweite Behauptung.  $\square$

Betrachte die Zerlegung  $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}^-$ , wobei  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{s}$  eine maximal unipotente Unteralgebra ist. Dann identifiziert sich  $\mathfrak{a}^*$  mit einem Unterraum von  $\mathfrak{t}^*$ . Für einen Teilraum  $\mathfrak{t}'$  von  $\mathfrak{t}^*$  sei  $W(\mathfrak{t}') := N_G(\mathfrak{t}')/Z_G(\mathfrak{t}')$ . Dann ist  $W := W(\mathfrak{t}^*)$  die Weylgruppe von  $G$ , und es gilt ebenfalls  $W(\mathfrak{t}') = N_W(\mathfrak{t}')/Z_W(\mathfrak{t}')$ . Bekanntlich lassen sich  $\mathfrak{t}^*/W$  und  $\mathfrak{g}^*/G$  miteinander identifizieren. Es ist leicht zu sehen, daß  $\mathfrak{t}'/W(\mathfrak{t}')$  die Normalisierung seines Bildes in  $\mathfrak{t}^*/W$  ist. Sei nun  $W_1 := W(\mathfrak{a}^*)$ . Wenn man noch berücksichtigt, daß  $L_X$  normal ist, ergeben sich aus obigen Lemmas folgende Inklusionen:

$$k[\mathfrak{a}^*]^{W_1} \subseteq k[L_X] \subseteq k[\mathfrak{a}^*].$$

Aus der Galoistheorie folgt, daß es genau eine Untergruppe  $W_X \subseteq W_1$  mit  $k[L_X] = k[\mathfrak{a}^*]^{W_X}$  gibt. Wir haben also folgende Situation:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}^* & \xrightarrow{\sigma} & T_X^* \\ \downarrow & & \Psi \downarrow \\ \mathfrak{a}^*/W_X & \xrightarrow{\sim} & L_X \end{array}$$

**Definition:** Die Gruppe  $W_X$  heißt die *Weylgruppe von  $X$* . Für singuläres  $X$  sei  $W_X := W_{X^{\text{reg}}}$ .

Die Konstruktion von  $W_X$  zeigt, daß sich die Weylgruppe nicht ändert, wenn man  $X$  durch eine offene,  $G$ -invariante Teilmenge ersetzt. Anhand von Beispielen (Abschnitt 7) kann man sehen, daß  $W_X$  wirklich eine nichttriviale Invariante für eine  $G$ -Varietät ist. Dann kann man sich fragen, ob in  $M_X$  noch Informationen über  $X$  stecken, die nicht in  $S$  und  $W_X$  enthalten sind. Der nächste Satz zeigt, daß dies nicht der Fall ist.

**Satz 6.4.** *Sei  $S \in \mathfrak{S}_X$ . Dann operiert die Weylgruppe  $W_X$  kanonisch auf  $M_{G/S}$ . Diese Operation kommutiert mit der von  $G$ , und  $M_{G/S} \rightarrow L_{G/S} = \mathfrak{a}^*$  ist  $W_X$ -äquivariant. Der Quotient von  $M_{G/S}$  nach  $W_X$  ist  $M_X$ .*

*Beweis:* Sei  $Z \rightarrow \mathbf{A}^1$  und  $X_t$  wie in Satz 2.7. Nach Teil 2) des nächsten Satzes gibt es einen kanonischen Morphismus

$$M_{G/S} = M_{X_0} \rightarrow M_Z = M_{X_1 \times \mathbf{A}^1} = M_X,$$

und damit einen Morphismus  $\gamma : M_{G/S} \rightarrow \mathfrak{a}^* \times_{L_X} M_X$ . Dabei ist  $\mathfrak{a}^* \times_{L_X} M_X$  irreduzibel, da die generische Faser von  $M_X \rightarrow L_X$  irreduzibel ist. Die Momentabbildung läßt sich noch auf andere Weise faktorisieren. Sei wieder  $\mathcal{M}_X$  das Bild von  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  in  $\mathcal{D}(X)$ , versehen mit der  $X$ -Filtrierung. Dann ist  $\text{gr } \mathcal{M}_X \subseteq k[T_X^*]$  eine als  $k[\mathfrak{g}^*]$ -Modul endlich erzeugte, nullteilerfreie Algebra, und die Momentabbildung faktorisiert durch das Spektrum  $\overline{M}_X$  von

gr  $\mathcal{M}_X$ . Daher gibt es einen kanonischen Morphismus  $M_X \rightarrow \overline{M}_X$ . Nach dem Korollar zu Satz 5.1 hängt  $\overline{M}_X$  nur vom Typ  $S$  ab. Wir haben also folgende Situation:

$$\begin{array}{ccc} M_{G/S} & \xrightarrow{\gamma} & \mathfrak{a}^* \times_{L_X} M_X \\ & \searrow \beta & \downarrow \\ & & \mathfrak{a}^* \times \overline{M}_X \end{array}$$

Da  $\beta$  nach Korollar 4.6 birational ist, ist  $\gamma$  der Normalisierungsmorphismus. Dies liefert die Operation von  $W_X$  und alle anderen Behauptungen.  $\square$

Wir untersuchen nun das funktorielle Verhalten von  $\mathfrak{a}^*$ ,  $M_X$  und  $L_X$  bezüglich zwei Klassen von Morphismen.

**Definition:** Ein Morphismus  $\psi : X \rightarrow Y$  zwischen zwei Varietäten heißt *generisch endlich*, wenn  $\dim X = \dim \overline{\psi(X)}$  ist (z.B. eine abgeschlossene Einbettung).

**Satz 6.5.** Sei  $\psi : X \rightarrow Y$  ein  $G$ -äquivarianter Morphismus zwischen nicht notwendig glatten  $G$ -Varietäten. Sei  $U \subseteq S_X \in \mathfrak{S}_X$  und  $U \subseteq S_Y \in \mathfrak{S}_Y$ .

1) Sei  $\psi$  dominant:

Es gilt  $S_X \subseteq S_Y$ , und es gibt endliche, homogene kanonische Morphismen  $\psi^* : \mathfrak{a}_Y^* \rightarrow \mathfrak{a}_X^*$ ,  $M_Y \rightarrow M_X$  und  $L_Y \rightarrow L_X$ , die mit  $M_\bullet \rightarrow L_\bullet$  und  $\mathfrak{a}_\bullet^* \rightarrow L_\bullet$  vertauschen. Insbesondere ist  $W_Y$  ein Subquotient von  $W_X$ .

2) Sei  $\psi$  generisch endlich:

Es gilt  $S_Y^0 \subseteq S_X^0$  (und sogar  $S_Y \subseteq S_X$ , wenn  $\psi$  injektiv, und  $Y$  normal ist), und es gibt endliche, homogene kanonische Morphismen  $\psi_* : \mathfrak{a}_X^* \rightarrow \mathfrak{a}_Y^*$ ,  $M_X \rightarrow M_Y$  und  $L_X \rightarrow L_Y$ , die mit  $M_\bullet \rightarrow L_\bullet$  und  $\mathfrak{a}_\bullet^* \rightarrow L_\bullet$  vertauschen. Insbesondere ist  $W_X$  ein Subquotient von  $W_Y$ .

3) Sei  $\psi$  generisch étale:

Dann sind die  $\psi^*$  und  $\psi_*$  invers zueinander. Insbesondere ist  $W_X = W_Y$ .

4) Es gibt eine nicht leere  $G$ -stabile, offene Teilmenge  $X^0 \subseteq X$ , so daß  $\psi_* : \mathfrak{a}_{Gx}^* \rightarrow \mathfrak{a}_X^*$ ,  $M_{Gx} \rightarrow M_Y$ ,  $L_{Gx} \rightarrow L_X$  für alle  $x \in X^0$  Isomorphismen sind. Insbesondere gilt  $W_{Gx} = W_X$ .

*Beweis:* Zunächst sei bemerkt, daß sich die Varietäten  $\mathfrak{a}_\bullet^*$ ,  $M_\bullet$  und  $L_\bullet$  nicht ändern, wenn man  $X$  (bzw.  $Y$ ) durch eine offene Teilmenge ersetzt. Damit können wir in 1) voraussetzen, daß  $X, Y$  und  $\psi$  glatt sind und daß alle Fasern dieselbe Anzahl von Komponenten haben. In 2) können wir annehmen, daß  $X$  glatt ist und daß  $\psi$  eine unverzweigte Überlagerung seines Bildes darstellt.

Wir beweisen zunächst die Aussagen über  $S_X$  und  $S_Y$ . Für dominantes  $\psi$  ist die Behauptung wegen  $B_x \subseteq B_{\psi(x)}$  klar. Weiterhin ist offenbar  $S_X^0 = S_Y^0$ , wenn  $\psi$  étale

ist. Daher genügt es  $S_Y \subseteq S_X$  zu beweisen, wenn  $X$  normal und  $\psi$  eine abgeschlossene Einbettung ist. Dazu wenden wir Satz 2.3 auf  $X \subseteq Y$  an und erhalten eine affine  $L$ -Varietät  $Z$ . Es ist eine bekannte Folgerung aus Lunas Scheibensatz, daß alle Standgruppen von Punkten  $z \in Z$  in der Nähe von  $X \cap Z$  zu einer Untergruppe von  $L_0$  konjugiert sind. Daraus folgt  $S_Y \subseteq S_X$ .

Eine Inklusion  $S_X \subseteq S_Y$  induziert  $P_X/S_X \rightarrow P_Y/S_Y$ , und damit  $\mathfrak{a}_Y^* \hookrightarrow \mathfrak{a}_X^*$ . Dies liefert  $\psi^*$  bzw. analog  $\psi_*$  für  $\mathfrak{a}_\bullet^*$ .

Wenn  $Y$  glatt ist, gibt es folgendes kommutierende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} T_X^* & \xleftarrow{\iota} & T_Y^* \times_Y X & \xrightarrow{\pi} & T_Y^* \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ M_X & & & & M_Y \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \tilde{M}_X & \subseteq & \mathfrak{g}^* & \supseteq & \tilde{M}_Y \end{array}$$

Sei  $\psi$  surjektiv mit irreduziblen Fasern. Dann ist  $\tilde{M}_Y \subseteq \tilde{M}_X$  und der Morphismus  $T_Y^* \times_Y X \rightarrow \tilde{M}_X$  ist auf den Fasern von  $\pi$  konstant. Da diese irreduzibel sind, ist auch  $T_Y^* \times_Y X \rightarrow M_X$  auf den Fasern konstant, d.h. dieser Morphismus faktorisiert durch  $T_Y^*$  und damit durch  $M_Y$ . Dies liefert  $\psi^* : M_Y \rightarrow M_X$ , sowie  $L_Y = M_Y // G \rightarrow M_X // G = L_X$ .

Sei  $\psi$  endlich, und  $Y$  sei glatt. Dann ist  $\iota$  surjektiv mit irreduziblen Fasern, und die gleiche Argumentation wie oben liefert  $\psi_*$ .

Sei  $\psi$  étale. Wir zeigen, daß  $\psi_* : L_X \rightarrow L_Y$  ein Isomorphismus ist. Dazu können wir sogar annehmen, daß  $\psi$  eine Galoisüberlagerung mit Gruppe  $E$  ist. Dies induziert eine Operation von  $E$  auf  $L_X$  und es gilt  $L_Y = L_X/E$ . Es gilt kanonisch  $\mathfrak{s}_X = \mathfrak{s}_Y$  und daher  $\mathfrak{a}_X = \mathfrak{p}_X/\mathfrak{s}_X = \mathfrak{p}_Y/\mathfrak{s}_Y = \mathfrak{a}_Y$ , d.h.  $E$  operiert trivial auf  $\mathfrak{a}_X^*$  und daher auch auf  $L_X$ . Dies zeigt die Behauptung. Aus Satz 6.4 folgt dann, daß es auch einen Isomorphismus  $\psi_* : M_X \rightarrow M_Y$  gibt. Damit ist 3) bewiesen.

Der Morphismus  $\psi$  sei dominant. Dann läßt er sich in  $X \xrightarrow{\psi_1} Z \xrightarrow{\psi_2} Y$  faktorisieren, wobei  $\psi_1$  dominant mit irreduziblen generischen Fasern und  $\psi_2$  étale ist. Wir definieren dann  $\psi^* := \psi_1^* \circ \psi_2^{*-1}$ .

Wir beweisen nun, daß die Morphismen  $\psi^*$  und  $\psi_*$  mit  $M_\bullet \rightarrow L_\bullet$  und  $\mathfrak{a}_\bullet^* \rightarrow L_\bullet$  vertauschen. Für  $M_\bullet \rightarrow L_\bullet$  ist dies trivial. Sei  $\psi$  dominant, und wähle nun  $P^-$ ,  $x \in X$  wie bei der Konstruktion von  $\sigma : \mathfrak{a}^* \rightarrow T_x^*$ . Dann haben wir  $T_x(X) \rightarrow T_y(Y)$  mit  $y = \psi(x)$ . Wegen  $\mathfrak{p}^-x = \mathfrak{b}^-x \rightarrow \mathfrak{b}^-y = \mathfrak{p}^-y$  können wir Komplemente  $R_x \subseteq T_x(X)$  und  $R_y \subseteq T_y(Y)$  mit  $R_x \rightarrow R_y$  finden. Damit erhalten wir das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_X^* & \hookrightarrow & \mathfrak{a}_Y^* \\ \sigma \downarrow & & \sigma \downarrow \\ T_x^*(X) & \hookrightarrow & T_y^*(Y) \end{array}$$

Daraus folgt die Behauptung für  $\psi^*$ , und 1) ist bewiesen.

Sei jetzt  $\psi$  injektiv und  $Y$  glatt. Wir wenden Satz 2.3 auf  $X \subseteq Y$  an, und erhalten  $P^-, Z, L$  und  $L_0$ . Sei  $z_0 \in X \cap Z$  und wähle eine  $L_0$ -stabile Scheibe  $Z_0 \subseteq Z$  durch  $x_0$ . Weiter sei  $L = A_0 \cdot L_0$ , wobei  $A_0$  ein Torus ist, der  $L_0$  endlich schneidet. Dann zerlegt sich  $T_z(Y)$  für  $z \in Z_0$  wie folgt:  $T_z(Y) = \mathfrak{a}_0 z \oplus T_z(Z_0) \oplus \mathfrak{p}_u^- z$ , und liefert Morphismen  $\sigma_z : \mathfrak{a}_X^* = \mathfrak{a}_0^* \rightarrow T_z^*(X) \rightarrow L_Y$ . Wegen  $\mathfrak{b}^- z \supseteq \mathfrak{a}_0 z \oplus \mathfrak{p}_u^- z$  läßt sich in jedem Punkt  $z$  das Komplement  $R_z$  zu  $\mathfrak{b}^- z$  in  $T_z(Z_0)$  wählen. Damit sieht man, daß  $\sigma_{z_0}$  der Morphismus  $\mathfrak{a}_X^* \rightarrow L_X \rightarrow L_Y$  ist und daß für allgemeine Punkte gilt, daß  $\sigma_z$  die Einschränkung von  $\mathfrak{a}_Y^*$  auf  $\mathfrak{a}_X^*$  ist. Da  $\sigma_z$  stetig von  $z$  abhängt, gilt dies auch für  $\sigma_{z_0}$ , was zu beweisen war.

Sei jetzt  $\psi$  injektiv, aber  $Y$  nicht notwendig glatt. Durch Aufblasen von  $Y$  in  $X$ , Normalisieren, und Einschränkung auf eine offene Teilmenge erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \tilde{Y} \\ \pi \downarrow & & \tilde{\pi} \downarrow \\ X & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

wobei  $\tilde{X}$  und  $\tilde{Y}$  glatt sind. Weiter ist  $\pi$  dominant und  $\tilde{\pi}$  birational. Wir definieren also  $\psi_* := \tilde{\pi}_* \circ \tilde{\psi}_* \circ \pi^*$ . Dieser Morphismus kommutiert mit  $\mathfrak{a}_\bullet^* \rightarrow L_\bullet$  und ist deshalb unabhängig von der Wahl von  $\tilde{X}$ . Damit folgt 2).

Nach Rosenlicht [18] gibt es eine offene  $G$ -stabile Teilmenge  $X^0 \subseteq X$  und einen  $G$ -invarianten, glatten, surjektiven Morphismus  $\tau : X^0 \rightarrow V$ , so daß die Fasern  $X_v := \tau^{-1}(v)$  genau die Bahnen sind. Weiterhin können wir annehmen, daß  $\text{rg } X_v$  konstant auf  $V$  ist. Da es nur endlich viele normale Unter-algebren von  $k[\mathfrak{a}^*]$  gibt, die  $k[\mathfrak{a}^*]^{W(\mathfrak{a}^*)}$  enthalten, können wir annehmen, daß  $M_0 := M_{X_v}$  unabhängig von  $v$  ist. Da weiterhin  $\Psi_v : T_{X_v}^* \rightarrow M_0$  eindeutig ist, setzt sich  $\Psi_v$  zu einem Morphismus  $T_{X^0/V}^* \rightarrow M_0$  zusammen. Dies liefert  $\Psi : T_{X^0}^* \rightarrow T_{X^0/V}^* \rightarrow M_0$ , d.h. ein Inverses  $M_{X^0} \rightarrow M_0$  zur kanonischen Abbildung  $M_0 \rightarrow M_{X^0}$ . Dies beweist 4).  $\square$

Der nächste Satz ist das Hauptergebnis dieser Arbeit.

**Satz 6.6.** a) Die Weylgruppe von  $X$  ist kristallographisch, d.h. wird von Spiegelungen erzeugt und läßt ein Gitter invariant.

b)  $L_X$  ist ein affiner Raum, d.h.  $k[L_X]$  ist ein Polynomring.

c) Der Morphismus  $\Psi$  ist surjektiv und flach, insbesondere haben alle Fasern dieselbe Dimension.

*Beweis:* Zunächst ist  $\mathfrak{a}$  die Liealgebra eines Torus  $A$  und  $W_X$  läßt das Gitter  $\text{Hom}(\mathbf{G}_m, A)$  invariant. Nach dem Satz von Chevalley-Shephard-Todd ([5] Ch.V §5 n<sup>o</sup> 5.5 Thm.4) sind also a) und b) äquivalent.

Wir beweisen zuerst, daß  $\Psi$  äquidimensional ist. Dazu genügt es diese Eigenschaft für  $\tilde{\Psi} : T_X^* \rightarrow \tilde{L}_X$  nachzuweisen. Da  $\tilde{\Psi}$  homogen ist, genügt es zu zeigen, daß die Nullfaser  $N$  Kodimension  $r := \text{rg } X$  in  $T_X^*$  hat. Wieder wegen Homogenität braucht man dies nur im Nullschnitt von  $T_X^*$  zu beweisen. Die Behauptung ist sicher wegen  $N \cap \sigma(\mathfrak{a}^*) = \{x\}$  in  $x$  richtig. Zerlege nun  $X$  in endlich viele  $G$ -stabile, lokal abgeschlossene Untervarietäten  $X_i$ , so daß auf ihnen  $\text{rg } Gy$  ( $y \in X_i$ ) konstant  $r_i$  ist. Sei  $n_i := \dim X_i$ . Entsprechend zerlegt sich  $T_X^*$  in  $T_i^* := T^*(X)|_{X_i}$ . Es besteht das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} T_{X_i}^* & \xleftarrow{\pi_i} & T_i^* & \hookrightarrow & T_X^* \\ \downarrow \tilde{\Psi}_i & & & & \downarrow \tilde{\Psi} \\ \mathfrak{g} // G & & \longleftrightarrow & & \mathfrak{g} // G \end{array}$$

Sei  $N_i$  die Nullfaser von  $\tilde{\Psi}_i$ . Dann ist  $N$  die Vereinigung der  $\pi_i^{-1}(N_i)$ . Jede dieser Mengen hat die Dimension  $(2n_i - r_i) + (n - n_i)$  und damit die Kodimension  $n - n_i + r_i$ . Also ist  $n - n_i + r_i \geq r$  zu zeigen oder äquivalent  $n - r \geq n_i - r_i$ . Für eine beliebige algebraische Gruppe  $H$  und eine  $H$ -Varietät  $Y$  sei  $d_H(Y)$  die minimale Kodimension der  $H$ -Bahnen in  $Y$ . Mit dieser Bezeichnung ist  $r = d_U(X) - d_B(X)$  und damit  $n - r = (n - d_U(X)) + d_B(X)$ . Nun ist  $n - d_U(X)$  die Dimension der generischen Bahn von  $U$  in  $X$ , und damit größer oder gleich  $n_i - d_U(X_i)$ . Andererseits ist  $d_B(X) \geq d_B(X_i)$  nach [23]. Also ist  $\Psi$  äquidimensional.

Nach Satz 6.5 4) können wir annehmen, daß  $X$  homogen ist. Weiterhin können wir dann noch  $X$  durch eine glatte Vervollständigung ersetzen. Sei  $X$  also vollständig und enthalte eine offene Bahn. Wir folgen ab jetzt den Ideen in [14]. Sei  $W_s \subseteq W_X$  die von den Spiegelungen erzeugte Untergruppe. Sie ist sogar ein Normalteiler, und wir setzen  $E := W_X/W_s$ , sowie  $V := \mathfrak{a}^*/W_s$ . Nach Chevalley ist  $V$  wieder ein affiner Raum und  $E$  operiert ohne Spiegelungen auf  $V$ . Sei  $V_s := \{v \in V \mid E_v \neq 1\}$ . Nach Konstruktion ist die Kodimension von  $V_s$  in  $V$  mindestens zwei. Das Bild von  $V_s$  in  $V/E = L_X$  ist genau die Singularitätenmenge. Sei  $R := L_X^{\text{reg}}$ . Da  $\Psi$  äquidimensional ist, ist die Kodimension von  $\Psi^{-1}(L_X \setminus R)$  in  $T_X^*$  auch mindestens zwei. Daher ist die Fundamentalgruppe von  $\Psi^{-1}(R)$  gleich der von  $T_X^*$  und damit auch gleich der von  $X$ . Diese ist aber trivial, weil  $X$  vollständig und unirational ist ([19]). Da die generischen Fasern von  $\Psi$  irreduzibel sind, ist auch  $\Psi^{-1}(R) \times_R (V \setminus V_s)$  irreduzibel und ist somit eine Galoisüberlagerung von  $\Psi^{-1}(R)$  mit Gruppe  $E$ . Also ist  $E$  trivial,  $W_s = W_X$  und a) b) sind gezeigt. Die Flachheit von  $\Psi$  folgt nun aus der Glattheit von  $T_X^*$  und  $L_X$ , sowie der Äquidimensionalität ([9] §15.4.2).□

## 7. Zur Geometrie der Momentabbildung

Im Beweis des letzten Satzes haben wir schon folgende Bezeichnung verwendet:

**Definition:** Für eine algebraische Gruppe  $H$  und eine  $H$ -Varietät  $Y$  ist  $d_H(Y) := \min_{y \in Y} \text{kodim}_Y Hy = \text{tr.grad}_k k(Y)^H$  die *generische Modularität* von  $Y$ . Die generische Modularität  $c(X) := d_B(X)$  einer  $G$ -Varietät  $X$  bezüglich einer Boreluntergruppe  $B$  heißt die *Kompliziertheit* von  $X$ . Varietäten mit  $c(X) = 0$  heißen *sphärisch*.

In [10] wurde  $c(X)$  die *Klasse* von  $X$  genannt. Ist  $X = G/H$  sphärisch, so heißt  $(G, H)$  auch ein *Gel'fandpaar*.

**Satz 7.1.** Sei  $n = \dim X$ ,  $c = c(X)$ ,  $r = \text{rg } X$  und  $S \in \mathfrak{S}_X$ . Dann ist

$$\dim G/S = n - c; \dim M_X = 2n - 2c - r; \dim L_X = r; d_G(T_X^*) = 2c + r.$$

Insbesondere gilt für sphärisches  $X$ , daß die generische Faser von  $\Psi : T_X^* \rightarrow L_X$  eine offene, dichte Bahn enthält.

*Beweis:* Nach Konstruktion von  $S$  sind die generischen  $B$ -Bahnen von  $X$  und  $G/S$  isomorph, also  $\dim G/S = n - c$ . Da  $G \times^P \mathfrak{s}^\perp \rightarrow \mathfrak{g}^*$  endlich ist, gilt  $\dim M_{G/S} = \dim G \times^P \mathfrak{s}^\perp = 2 \dim G/S - r = 2n - 2c - r$ . Aus Satz 5.4 folgt  $\dim L_X = r$ . Aus Formel (\*) im dritten Abschnitt folgt  $\mathfrak{g}x = (\text{Kern } d\tilde{\Phi}_x)^\perp$  und damit:

$$\max \dim Gx = \dim T_X^* - (\dim T_X^* - \dim \tilde{M}_X) = \dim M_X.$$

Also ist  $d_G(T_X^*) = 2c + r$ . □

**Korollar 7.2.** Sei  $G/H$  eine sphärische homogene Varietät. Dann ist  $k[\mathfrak{h}^\perp]^H$  ein Polynomring, über dem  $k[\mathfrak{h}^\perp]$  flach ist.

*Beweis:* Es gilt  $k[\mathfrak{h}^\perp]^H = k[T_{G/H}^*]^G = k[L_{G/H}]$ . □

**Bemerkung:** Man beachte, daß  $H$  nicht reduktiv zu sein braucht. Für reduktives  $H$  hat Brion einen anderen Beweis gefunden (unveröffentlicht). In [15] hat Panyushev ebenfalls einen Beweis des Korollars angekündigt.

**Beispiele:** 1. Sei  $X$  horosphärisch. Zur Berechnung von  $W_X$  können wir annehmen, daß  $X = G/S$  homogen ist. Wenn wir  $\mathfrak{s}^\perp = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_u$  schreiben, faktorisiert  $\tilde{\Psi}$  in  $T_X^* = G \times^S (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_u) \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g} // G$ , d.h.  $L_X = \mathfrak{a}$  und  $W_X = 1$ . Wir werden später sehen, daß horosphärischen Varietäten durch  $W_X = 1$  charakterisiert sind.

2. Sei  $X = G/H$  eine symmetrische Varietät, d.h.  $H$  ist die Fixpunktmenge eines involutorischen Automorphismus  $\sigma$  von  $G$ . Sei  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}^\perp \subseteq \mathfrak{g}$  eine maximale kommutative

Unteralgebra. Weiter sei  $W = N_H(\mathfrak{a})/Z_H(\mathfrak{a})$  die sogenannte kleine Weylgruppe. Dann ist bekannt (siehe z.B. [22]), daß die Einschränkungabbildung einen Isomorphismus  $k[\mathfrak{h}^\perp]^H \xrightarrow{\sim} k[\mathfrak{a}]^W$  liefert. Mit Korollar 7.2 folgt, daß  $W_X = W$  ist.

3. Das nächste Beispiel ist von Brion [6]. Sei  $G = \mathrm{Sp}_4$ ,  $H = \mathbf{G}_m \times \mathrm{SL}_2 \subseteq \mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_2 \subseteq G$  und  $X = G/H$ . Dann ist  $X$  sphärisch, und der Rang ist zwei. Man rechnet leicht nach, daß  $k[\mathfrak{h}^\perp]^H$  von zwei quadratischen Polynomen erzeugt wird. Insbesondere ist  $W_X = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ . In diesem Fall gibt es keinen Cartanunterraum wie im zweiten Beispiel. Außerdem ist  $L_X \neq \tilde{L}_X$ .

4. Sei  $X = G/H$  mit  $H = 1$  oder  $H = T$ . In beiden Fällen ist  $W_X$  die (klassische) Weylgruppe von  $G$ . Im ersten Fall ist dies klar. Im zweiten Fall können wir annehmen, daß  $G$  halbeinfach ist. Dann ist  $\mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^-$ . Sei  $e \in \mathfrak{u}$ ,  $h \in \mathfrak{t}$ ,  $f \in \mathfrak{u}^-$  ein Jacobson-Morozov-Tripel zu einem regulär nilpotenten Element  $e$ . Dann gilt  $V := e + \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(f) \subseteq \mathfrak{t}^\perp$ , und  $V \rightarrow \mathfrak{g}/G$  ist ein Isomorphismus, d.h.  $T_X^* \rightarrow \mathfrak{g}/G$  hat einen Schnitt. Also sind die generischen Bahnen irreduzibel, und  $W_X$  ist die Weylgruppe von  $G$ .

Über  $M_X \rightarrow L_X$  läßt sich folgendes sagen:

**Lemma 7.3.** *Alle Fasern von  $M_X \rightarrow L_X$  sind irreduzibel, enthalten nur endlich viele Bahnen, und diese Bahnen haben gerade Dimension.*

*Beweis:* Die letzten beiden Aussagen folgen aus den entsprechenden wohlbekanntem Tatsachen für den Morphismus  $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*/G$ . Es bleibt die Irreduzibilität der Fasern. Nach Satz 6.4 können wir uns auf den Fall  $X = G/S$  beschränken. Die Fasern von  $T_X^* \rightarrow L_X = \mathfrak{a}$  haben die Gestalt  $G \times^S (a_0 + \mathfrak{p}_u)$  und sind daher irreduzibel. Dasselbe gilt dann für  $M_X \rightarrow L_X$ , da  $T_X^* \rightarrow M_X$  surjektiv ist (Lemma 4.1).  $\square$

Wir untersuchen nun den Morphismus  $\Phi : T_X^* \rightarrow M_X$ . Er ist im allgemeinen nicht surjektiv, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei  $G = \mathrm{GL}_4$ ,  $H = \mathrm{SO}_4$  und  $X = G/H$ . Dann besteht  $\mathfrak{h}^\perp$  aus den symmetrischen Matrizen. Weiterhin ist  $M_X = \mathfrak{g}$ . Man überlegt sich jedoch leicht, daß eine nilpotente Matrix mit zwei Jordanblöcken der Länge 3 bzw. 1 nicht konjugiert zu einer symmetrischen Matrix ist. Es gilt aber:

**Satz 7.4.** *Sei  $C := \overline{M_X \setminus \Phi(T_X^*)}$ . Dann ist die Kodimension von  $C$  in  $M_X$  mindestens zwei, d.h.  $\Phi$  ist surjektiv in Kodimension eins.*

*Beweis:* Sei  $C_0$  eine irreduzible Komponente von  $C$ , deren Kodimension in  $M_X$  eins ist. Nach Lemma 7.3 ist jede Faser  $F$  von  $M_X \rightarrow L_X$  irreduzibel und enthält eine dichte Bahn  $F'$ , so daß die Kodimension von  $F \setminus F'$  in  $F$  mindestens zwei ist. Daraus sieht man, daß es einen Divisor  $C_1$  in  $L_X$  mit  $C_0 = \Pi^{-1}(C_1)$  gibt. Sei  $D := \Phi^{-1}(C_0) \subseteq T_X^*$ . Nach Annahme ist  $D$  ein Divisor, dessen Bild in  $M_X$  mindestens die Kodimension zwei

hat. Insbesondere ist die Dimension der Fasern von  $\Phi$  in  $D$  um mindestens eins größer als die der generischen Faser. Sei nun  $\Delta : Z \rightarrow \mathbf{A}^1$  eine Deformation in eine horosphärische Varietät (Satz 2.7). Dann gibt es auch einen Morphismus  $\Psi_Z : T_{Z/\mathbf{A}^1}^* \rightarrow M_X \times \mathbf{A}^1$ . Für den Divisor  $D_0 = \Psi_Z^{-1}(C_0 \times \{0\}) \subseteq T_{X_0}^*$  gilt dann ebenfalls, daß die Dimension der generischen Faser von  $\Phi$  auf  $D_0$  um mindestens eins größer ist als generisch. Wir zeigen, daß  $D_0$  nicht existieren kann. Dazu können wir annehmen, daß  $X_0 = G/S$  horosphärisch und homogen ist. Sei  $P := N_G(S)$ . Dann faktorisieren wir  $\Phi$  wie folgt:

$$T_{G/S}^* = G \times^S \mathfrak{s}^\perp \xrightarrow{\Phi_1} G \times^P \mathfrak{s}^\perp \xrightarrow{\Phi_2} \mathfrak{g}^*$$

Da  $\Phi_1$  surjektiv und flach ist, müssen wir zeigen, daß es in  $G \times^P \mathfrak{s}^\perp$  keinen Divisor  $D_1$  mit den oben erwähnten Eigenschaften gibt. Nun ist  $\mathfrak{s}^\perp = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_u$ . Es gilt also  $\mathfrak{p}_u \subseteq \Psi^{-1}(0) \subseteq D_1$ . Nach [17] ist  $G \times^P \mathfrak{p}_u \rightarrow \mathfrak{g}$  generisch endlich, d.h.  $\Phi^{-1}(\Phi(x))$  ist endlich für generische  $x \in \mathfrak{p}_u$ . Widerspruch!  $\square$

**Korollar 7.5.** *Wir fassen  $k(M_X)$  als Teilkörper von  $k(T_X^*)$  auf. Dann gilt  $k[M_X] = k[T_X^*] \cap k(M_X)$ .*

Das folgende ist eine Adaption von [12] auf den Fall algebraischer Varietäten. Für eine rationale Funktion  $f \in k(T_X^*)$  sei  $H_f$  das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld, definiert durch

$$\langle H_{f,x} | \eta \rangle = \eta f \quad \text{für alle } \eta \in T_x T_X^*.$$

Dies liefert ein Poissonprodukt  $\{f_1, f_2\} := H_{f_1} f_2$  auf dem Körper  $K := k(T_X^*)$ . Für eine Teilmenge  $M \subseteq K$  sei  $M^c := \{f \in K \mid \{f, g\} = 0 \text{ für alle } g \in M\}$ . Der folgende Satz zeigt, wie man  $M_X$  aus dieser Poissonstruktur ermitteln kann.

**Satz 7.6.** *Es gilt  $k(M_X)^c = k[M_X]^c = K^G$  und  $(K^G)^c = k(M_X)$ , sowie  $(K^G)^c \cap k[T_X^*] = k[M_X]$ .*

*Beweis:* Jedes  $\xi \in \mathfrak{g}$  induziert ein Vektorfeld  $\xi_*$  auf  $X$ . Andererseits können wir  $\xi$  als lineare Funktion  $\xi^*$  auf  $\mathfrak{g}^*$  auffassen. Formel (\*) ist dann äquivalent zu  $H_{\xi^* \circ \tilde{\Phi}} = \xi_*$ . Damit ist  $\{\xi^* \circ \tilde{\Phi}, f\} = \xi_* f$ . Dies zeigt  $k[\tilde{M}_X]^c = K^G$ . Nun ist  $k(M_X)^c$  der algebraische Abschluß von  $k[\tilde{M}_X]$  in  $K$ . Daraus folgt leicht, daß ihre Zentralisatoren übereinstimmen. Weiterhin ist  $k(M_X)$  der Quotientenkörper von  $k[M_X]$ . Daraus folgen die ersten beiden Gleichheiten.

Noch zu zeigen ist  $(K^G)^c \subseteq k(M_X)$ . Für jedes  $x \in T_X^*$  gilt  $\mathfrak{g}x = (\text{Kern } d\tilde{\Phi}_x)^\perp$ . Sei jetzt  $x$  ein Punkt in allgemeiner Lage. Dann gibt es  $G$ -invariante, rationale, in  $x$  definierte Funktionen  $f_i$  mit

$$\mathfrak{g}x = \bigcap_i \text{Kern}(df_i)_x = \bigcap_i H_{f_i,x}^\perp = \left( \sum_i kH_{f_i,x} \right)^\perp.$$

Dies bedeutet, daß Kern  $d\Phi_x = \text{Kern } d\tilde{\Phi}_x$  von den  $H_{f_i, x}$  aufgespannt wird. Sei nun  $g \in (K^G)^c$ . Dann ist  $H_{f_i, x}g = \{f_i, g\}_x = 0$ , also  $dg|_{\text{Kern } d\Phi_x} = 0$ . Dies gilt für fast alle  $x \in T_X^*$ . Daraus folgt, daß  $g$  auf der Faser  $\Phi^{-1}(\Phi(x))$  lokal konstant ist. Diese ist aber nach Konstruktion irreduzibel, d.h.  $g$  ist auf den generischen Fasern von  $\Phi$  konstant, und es folgt  $g \in k(M_X)$ .  $\square$

Bemerkungen: 1. In diesem Satz kann man  $K$  durch jede  $G$ -invariante Unteralgebra ersetzen, die  $K$  als Quotientenkörper hat, z.B. durch die Algebra, die von allen rationalen, homogenen Funktionen erzeugt wird, oder wenn  $X$  quasiaffin ist, durch  $k[T_X^*]$ .

2. In [11] haben Guillemin und Sternberg einen analogen Satz im Kontext differenzierbarer Mannigfaltigkeiten und kompakter Gruppen bewiesen. Man vergleiche auch das Ergebnis oben mit der Vermutung in [11]. Es würde sich sicher lohnen, die hier dargestellte Theorie auf kompakte Gruppen, reelle Liegruppen oder Gruppen über nicht algebraisch abgeschlossenen Körpern auszudehnen.

## 8. Die generische Standgruppe

Im folgenden bestimmen wir die Standgruppen generischer Punkte von  $T_X^*$ . Es wird sich herausstellen, daß sie zueinander konjugiert sind, und nur vom Typ von  $X$  abhängen.

Zuerst untersuchen wir wieder den Fall einer horosphärischen homogenen Varietät  $X = G/S$ . Sei  $P_u$  das unipotente Radikal von  $P = N_G(S)$  und  $\mathfrak{a} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{s}^\perp$ . Dann ist  $\mathfrak{s}^\perp = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_u$ . Für  $x \in \mathfrak{s}^\perp$  sei  $x = x_s + x_u$  die Jordanzerlegung. Es gilt  $x_u \in \mathfrak{p}_u$  und es gibt ein  $g \in P_u$  mit  $x_s^g \in \mathfrak{a}$ , d.h. nach Konjugation in  $P_u \subseteq S$  können wir annehmen, daß  $x = x_s + x_u$  ist mit  $x_s \in \mathfrak{a}$ ,  $x_u \in \mathfrak{u}$  und  $[x_s, x_u] = 0$ . Sei  $L := C_G(\mathfrak{a})$ . Dies ist eine Leviuntergruppe, die den Leviteil von  $P$  enthält. Für generisches  $x_s$  gilt  $L = G_{x_s}$ . Wir haben dann  $G_y = C_L(x_u) \cap P$ , sowie  $G_x = C_L(x_u) \cap S = G_y \cap S$ . Nach [17] hat  $S \cap L'$  eine dichte Bahn in  $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{l}$ . Daraus folgt, daß die Gruppen  $G_x$  bzw.  $G_{\Phi(x)}$  für generische  $x$  zueinander konjugiert sind. Weiterhin ist  $G_x$  ein Normalteiler von  $G_y$ , und es gibt eine Injektion  $G_y/G_x \hookrightarrow A = P/S$ . Wegen  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}_y$  ist dieser Homomorphismus auch surjektiv, d.h.  $G_y/G_x \xrightarrow{\sim} A$  ist ein Torus.

Wir übertragen nun diese Resultate auf beliebige  $X$ . Sei  $T_X^0$  die offene Teilmenge aller Punkte  $x \in T_X^*$  mit folgenden Eigenschaften:

- α) Der Stabilisator  $G_x$  hat minimale Dimension.
- β) Der Stabilisator  $G_{\Phi(x)}$  hat minimale Dimension.
- γ) Der Morphismus  $\tilde{\Psi} : T_X^* \rightarrow \tilde{L}_X$  ist glatt in  $x$ .

Man beachte die Tilde in γ). Wir wählen  $x \in T_X^0$  fest und setzen  $y = \Phi(x) \in M_X$ .

Betrachte nun folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T_X^* & & T_{G/S}^* \xrightarrow{\pi_0} G/S \\ \Phi \downarrow & & \Phi \downarrow \\ M_X & \longleftarrow & M_{G/S} \end{array}$$

Eine horosphärische Untergruppe  $S_0$  heißt eine *Polarisierung* von  $x$ , wenn es ein  $y_0 \in T_{G/S}^*$  mit  $y_0 \mapsto y$  und  $S_0 = G_{\pi_0(y_0)}$  gibt. Alle Polarisationen sind zu  $S$  konjugiert, und  $W_X$  operiert einfach transitiv auf ihnen (Satz 6.4).

**Satz 8.1.** Sei  $x \in T_X^0$ ,  $y = \Phi(x) \in M_X$  und  $S$  eine Polarisation von  $x$ . Dann ist  $G_y \cap S$  eine Untergruppe von  $G_x$  mit endlichem Index. Für generisches  $x$  gilt sogar Gleichheit. Insbesondere ist  $G_x$  normal in  $G_y$ , der Quotient ist ein Torus, es gibt eine kanonische Surjektion  $P/S = G_y/(G_y \cap S) \rightarrow G_y/G_x$ , und die Konjugationsklasse des Paares  $(G_x, G_y)$  hängt für generisches  $x$  nur vom Typ von  $X$  ab.

*Beweis:* Nach Satz 7.1 haben wir  $\max \dim Gx = \dim M_X$ . Weil die generische Faser von  $M_X \rightarrow L_X$  eine dichte, offene Bahn enthält, gilt  $\max \dim G\Phi(x) = \dim M_X - \dim L_X$ . Daraus folgt

$$\dim G_y/G_x = \dim L_X = \operatorname{rg} X.$$

Wir zeigen jetzt, daß  $\mathfrak{g}_x$  ein Normalteiler von  $\mathfrak{g}_y$  ist. Sei dazu  $z := \tilde{\Psi}(x) \in \tilde{L}_X \subseteq \mathfrak{g} // G$  und  $\mathfrak{m}$  das zu  $z$  gehörende maximale Ideal in  $k[\tilde{L}_X]$ . Für  $f \in k[\tilde{L}_X]$  sei  $H_f$  das zu  $f \circ \tilde{\Psi}$  gehörende Hamiltonsche Vektorfeld, d.h.

$$\langle H_{f,x} | \eta \rangle = \eta(f \circ \tilde{\Psi}) \quad \text{für alle } \eta \in T_x T_X^*.$$

Wählt man  $\eta \in \mathfrak{g}_x$ , so erhält man (Gleichung (\*)) in Abschnitt 3)

$$H_{f,x} \in (\mathfrak{g}_x)^\perp = \operatorname{Kern} d\tilde{\Phi}_x,$$

d.h.  $H_{f,x}$  ist tangential an die Faser von  $\tilde{\Phi}$  durch  $x$ . Wählt man aber  $\eta \in \operatorname{Kern} d\tilde{\Phi}_x \subseteq \operatorname{Kern} d\tilde{\Psi}_x$ , so erhält man

$$H_{f,x} \in (\operatorname{Kern} d\tilde{\Phi}_x)^\perp = \mathfrak{g}_x,$$

d.h. es gibt ein  $\xi \in \mathfrak{g}$  mit  $H_{f,x} = \xi x$  und  $d\tilde{\Phi}_x(H_{f,x}) = \xi y = 0$ . Das bedeutet, daß das Vektorfeld  $H_f$  tangential an  $G_y^0 x$  ist und liefert einen injektiven (Bedingung  $\gamma$ ) Homomorphismus von  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  in den Raum der  $G_y^0$ -invarianten Vektorfelder auf  $G_y^0 x$ , d.h.  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_y}(\mathfrak{g}_x)/\mathfrak{g}_x \subseteq \mathfrak{g}_y/\mathfrak{g}_x$ . Nach obiger Dimensionsberechnung ist  $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_y}(\mathfrak{g}_x) = \mathfrak{g}_y$ , d.h.  $G_x^0$  ist normal in  $G_y^0$ , wie behauptet.

Wir zeigen jetzt, daß der Quotient für generische  $x$  ein Torus ist. Sei wieder  $\Delta : Z \rightarrow \mathbf{A}^1$  wie in Satz 2.7 eine Deformation von  $X$  in eine horosphärische Varietät. Es gibt dann einen Morphismus  $\Phi_t : T_{X_t}^* \rightarrow M_X$ . Wir setzen  $F_t := \Phi_t^{-1}(y)$ . Für  $t = 0$  haben wir schon oben gezeigt, daß der Quotient  $G_y^0/G_{x_0}^0$  für ein generisches  $x_0 \in F_0$  ein Torus ist. Wähle einen Torus  $A_0 \subseteq G_y^0$ , so daß  $A_0 \rightarrow G_y^0/G_{x_0}^0$  endlich ist. Dann ist  $A_0 \rightarrow G_y^0/G_x^0$  für generische  $x \in Z$  ebenfalls endlich, und damit aus Dimensionsgründen surjektiv, d.h. der Quotient ist ein Torus.

Betrachte nun die Untergruppen  $G_{x'}^0 \in G_y^0$  mit  $x' \in T_X^0 \cap F_1$ . Es handelt sich um Normalteiler und für generisches  $x'$  ist der Quotient ein Torus.  $G_y^0$  enthält aber nur abzählbar viele solcher Normalteiler, und  $T_X^0 \cap F_1$  ist irreduzibel. Daraus folgt, daß die  $G_{x'}^0$  für generische  $x'$  identisch sind, und aus Stetigkeitsgründen gilt dasselbe für alle  $x'$ . Insbesondere operiert  $G_x^0$  trivial auf  $F_1$ , und damit auch auf  $F_0$ . Daraus folgt  $G_x^0 \subseteq G_y \cap S$ , und da beide Gruppen dieselbe Dimension haben  $G_x^0 = (G_y \cap S)^0$ .

Durch  $S$  wird genau eine Zusammenhangskomponente  $F_0^0$  von  $F_0$  bestimmt (Satz 6.4). Für  $t \neq 0$  setze  $F_t^0 = F_t$ . Aus Satz 6.4 folgt, daß  $G_y$  auf  $F_0^0$  operiert. Sei  $g \in G_y \cap S$ . Dann ist eine Potenz  $g^n$  in  $G_x^0$ , und operiert damit trivial auf  $F_t^0$ . Weiterhin operiert  $g$  trivial auf  $F_0^0$ . Wie im Beweis von Satz 2.5 folgt dann, daß  $g$  für alle  $t$  trivial auf  $F_t$  operiert, d.h.  $G_y \cap S \subseteq G_x$ .

Der Torus  $G_y/G_y \cap S$  operiert auf  $F_0$ , und alle Standgruppen sind trivial. Damit gilt dies auch für generisches  $x \in F_t$ , und zeigt die umgekehrte Inklusion  $G_x \subseteq G_y \cap S$ .  $\square$

**Korollar 8.2.** *Sei  $X$  quasiaffin. Dann ist die generische Standgruppe von  $G$  auf  $T_X^*$  reduktiv, und zwar genau der Leviteil von  $S \in \mathfrak{S}_X$ .*

*Beweis:* Nach Satz 2.6 ist  $G/S$  ebenfalls quasiaffin. Es genügt daher  $X = G/S$  zu betrachten. Nach den Bemerkungen am Anfang dieses Abschnitts ist die Behauptung äquivalent zu  $\mathfrak{c}_\alpha(\mathfrak{p}_u) = 0$ . Für eine Wurzel  $\alpha$  sei  $\mathfrak{u}_\alpha \cong \mathbf{G}_a$  die zugehörige Wurzeluntergruppe,  $\mathfrak{t}_\alpha := [\mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_{-\alpha}]$  und  $G_\alpha$  die Untergruppe von  $G$  mit Liealgebra  $\mathfrak{u}_\alpha \oplus \mathfrak{t}_\alpha \oplus \mathfrak{u}_{-\alpha}$ . Sei nun  $\mathfrak{u}_\alpha \in \mathfrak{p}_u$  mit  $[\mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{a}] = 0$ . Dann gilt  $\mathfrak{u}_{-\alpha} \notin \mathfrak{s}$ , aber  $\mathfrak{t}_\alpha \oplus \mathfrak{u}_\alpha \in \mathfrak{s}$ , d.h.  $X$  enthält die projektive Gerade  $(G_\alpha \cap S)/S$ , was der Quasiaffinität von  $X$  widerspricht.  $\square$

## 9. Der Fall $W_X = 1$

**Satz 9.1.** *Eine  $G$ -Varietät  $X$  ist genau dann horosphärisch, wenn  $W_X = 1$  ist.*

*Beweis:* Daß für horosphärische Varietäten  $W_X = 1$  gilt, haben wir schon gesehen. Sei jetzt umgekehrt  $W_X = 1$ . Nach Satz 6.5 4) können wir annehmen, daß  $X = G/H$  homogen ist. Zuerst betrachten wir den Fall  $\text{rg } X = 0$ . Sei  $S \in \mathfrak{S}_X$ . Dann ist der Rang von  $G/S$  ebenfalls Null, d.h.  $S = P$  ist parabolisch. Sei  $P^-$  eine  $P$  gegenüberliegende parabolische Untergruppe,  $L = P \cap P^-$  und  $T \subseteq L$  ein maximaler Torus. Nach Satz 2.3 gibt es eine offene,  $P^-$ -stabile Teilmenge von  $X$ , die zu  $(P^-/L) \times W$  isomorph ist, wobei  $P^-$  trivial auf  $W$  operiert. Sei  $x_0 \in W$ , und oBdA.  $H = G_{x_0}$ . Wähle eine Darstellung  $V$  mit einem  $v_0 \in V$ , so daß  $H$  die Standgruppe von  $kv_0 \in \mathbf{P}(V)$  ist. Sei  $V_\chi$  Eigenraum von  $T$  zum Charakter  $\chi$ . Wegen  $T \subseteq L$  gibt es ein  $\chi_0$  mit  $W \subseteq \mathbf{P}(V_{\chi_0})$ . Der Tangentialraum von  $X$  in  $x_0$  ist in  $V_{\chi_0} + \mathfrak{p}_u^- v_0/kv_0$  enthalten. Daraus folgt

$$\mathfrak{u}v_0 \subseteq V_{\chi_0} + \mathfrak{u}^- v_0.$$

Die Gewichte von  $T$  sind auf der linken Seite echt größer als  $\chi_0$ , während sie rechts kleiner oder gleich  $\chi_0$  sind. Es folgt  $\mathfrak{u}v_0 = 0$ , d.h.  $P \subseteq H$ . Dies bedeutet, daß  $H$  parabolisch, und  $X$  horosphärisch ist.

Sei der Rang von  $X$  jetzt beliebig. Wegen  $W_X = 1$  wird  $k[L_X]$  von linearen Funktionen erzeugt. Diese bilden einen Teilraum  $\mathfrak{a}$  von  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^H \subseteq k[\mathfrak{h}^\perp]^H = k[G \times^H \mathfrak{h}^\perp]^G$ . Wähle  $x \in \mathfrak{h}^\perp \subseteq T_X^*$  generisch, und setze  $y = \Phi(x)$ ,  $z = \tilde{\Psi}(x)$ , sowie  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal in  $z$ . Wie im Beweis von Satz 8.1., zweiter Absatz, gilt  $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{g}_y/\mathfrak{g}_x = \mathfrak{g}_y/(\mathfrak{g}_y \cap \mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}_y + \mathfrak{h})/\mathfrak{h}$ , d.h.  $G_y$  normalisiert  $H$ . Sei  $H_1 := G_y^0 H$ . Der Quotient  $H_1/H$  ist ein Torus, und wir haben einen Morphismus  $X = G/H \twoheadrightarrow X_1 := G/H_1$ . Der Teilraum  $T_{X_1}^* \times_{X_1} X = G \times^H (\mathfrak{g}_y + \mathfrak{h})^\perp$  von  $T_X^* = G \times^H \mathfrak{h}^\perp$  wird genau durch das Verschwinden der Funktionen aus  $\mathfrak{a}$  definiert ist. Aus Satz 6.5 1) folgt dann, daß der Rang von  $G/H_1$  Null ist. Also ist  $H_1$  parabolisch und damit  $H$  horosphärisch.  $\square$

## 10. Literatur:

- [1] Beilinson, A.; Bernstein, J., Localisation de  $\mathfrak{g}$ -modules. *C.R. Acad. Sc. Paris* **292** (1981), 15–18
- [2] Białyński-Birula, A., On action of  $SL_2$  on complete algebraic varieties. *Pac. J. Math.* **86** (1980), 53–58
- [3] Borho, W.; Brylinski, J.-L., Differential operators on homogeneous spaces I. *Invent. Math.* **69** (1982), 437–476
- [4] Borho, W.; Kraft, H., Über Bahnen und deren Deformation bei linearen Aktionen reductiver Gruppen. *Comment. Math. Helvet.* **54** (1979), 61–104
- [5] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4, 5 et 6. *Hermann (Paris)* (1968)
- [6] Brion, M., Vers une généralisation des espaces symétriques. *Preprint, Inst. Fourier* **79** (1987)
- [7] Brion, M.; Luna, D.; Vust, Th., Espaces homogènes sphériques. *Invent. Math.* **84** (1986), 617–632
- [8] Brion, M.; Pauer, F., Valuations des espaces homogènes sphériques. *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), 265–285
- [9] Dieudonné, J.; Grothendieck, A., Eléments de géométrie algébrique IV. *Publ. Math. IHES* **28** (1966)
- [10] Gel'fand, I. M.; Graev, M. I., Geometry of homogeneous spaces, representations of groups in homogeneous spaces and related questions of integral geometry. *Transl. II. Ser. Am. Math. Soc.* **37** (1964), 351–429
- [11] Guillemin, V.; Sternberg, Sh., Multiplicity-free spaces. *J. Diff. Geom.* **19** (1984), 31–56
- [12] Guillemin, V.; Sternberg, Sh., Symplectic techniques in physics. *Cambridge Univ. Press (Cambridge)* (1984)
- [13] Luna, D.; Vust, Th., Plongements d'espaces homogènes. *Comment. Math. Helv.* **58** (1983), 186–245
- [14] Panyushev, D.I., On orbit spaces of finite and connected linear groups. *Math. USSR Izv.* **20** (1983), 97–101
- [15] Панюшев, Д. И. Сложность и ранг однородных пространств и представление ковольтры *Preprint* (1988)
- [16] Попов, В. Л., Contractions of the actions of reductive algebraic groups. *Math. USSR Sbornik* **58** (1987), 311–335
- [17] Richardson, R. W., Conjugacy classes in parabolic subgroups of semisimple algebraic

- groups. *Bull. London Math. Soc.* **6** (1974), 21–24
- [18] Rosenlicht, M., On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces. *Trans. Am. Math. Soc.* **101** (1961), 211–223
- [19] Serre, J. P., On the fundamental group of a unirational variety. *J. London Math. Soc.* **34** (1959), 481–484
- [20] Soergel, W., Universelle versus relativ Einhüllende: Eine geometrische Untersuchung von Quotienten von universellen Einhüllenden halbeinfacher Lie-Algebren. *Dissertation, Hamburg* (1987)
- [21] Sumihiro, H., Equivariant completion. *J. Math. Kyoto Univ.* **14** (1974), 1–28
- [22] Vinberg, E. B., The Weylgroup of a graded Lie algebra. *Math. USSR Izv.* **10** (1977), 463–495
- [23] Vinberg, E. B., Complexity of action of reductive groups. *Func. Anal. Appl.* **20** (1986), 1–11